COUNCIL OF EUROPE CONSEIL DE L'EUROPE

Language Policy Division
Division des Politiques linguistiques

La langue dans les mathématiques ?
Etude comparative de quatre curriculums nationaux

Sigmund Ongstad (ed.), Brian Hudson (en coopération avec Peter Nyström), Birgit Pepin et Florence Mihaela Singer

Les langues d'enseignement des autres disciplines dans le contexte des
Langues de l'Education

Division des Politiques linguistiques, Strasbourg
www.coe.int/lang/fr

La langue dans les mathématiques ?
Etude comparative de quatre curriculums nationaux

Sigmund Ongstad (ed.), Oslo University, Norvège
Brian Hudson (en coopération avec Peter Nyström), Umeå University, Suède
Birgit Pepin, University of Manchester, Royaume-Uni
Florence Mihaela Singer, Institute for Educational Sciences, Roumanie

Conférence Intergouvernementale

Les Langues de Scolarisation dans un cadre européen pour les Langues de l'Éducation : apprendre, enseigner, évaluer

Prague 8-10 novembre 2007

Organisée par la
Division des Politiques linguistiques, Conseil de l'Europe, Strasbourg
en coopération avec le
Ministère de l'Education, de la Jeunesse et du Sport de la République tchèque

Division des Politiques linguistiques
DG IV – Direction de l'Education Scolaire, Extra-scolaire et de l'Enseignement Supérieur

Sommaire

La langue dans les mathématiques ?

Etude comparative de quatre curriculums nationaux

Sigmund Ongstad

Contexte

Cette brève analyse, quelque peu sommaire, repose sur une petite étude coordonnée menée dans quatre pays (Angleterre, Norvège, Suède et Roumanie) à propos du rôle concret de la langue et de la communication dans les programmes nationaux de mathématiques. L'objectif en est d'aborder les questions essentielles et pertinentes que poserait un cadre international commun de référence pour la/les langues de scolarisation. Les documents et les textes de travail sont le fruit de la recherche menée sur chacun des programmes nationaux (Pepin, 2007a, Hudson et Nyström, 2007, Singer, 2007a et Ongstad, 2007a). Les études suédoise et roumaine comportent toutes deux une annexe. Dans la première sont examinés des aspects particuliers de l'évaluation de la langue dans les mathématiques. La deuxième brosse un tableau relativement précis du rôle discursif que confère le programme national de mathématiques en Roumanie à la langue et la communication.

Enfin, figurent deux autres textes ; celui de B. Pepin, qui compare l'enseignement des mathématiques au Royaume-Uni, en Allemagne et en France (Pepin, 2007b), tandis que celui de M. Singer étudie le rôle de la connaissance en relation avec la langue (Singer, 2007b). Un article plus long de S. Ongstad (publiée séparément) résumera la place donnée à la langue et à la communication dans l'enseignement des mathématiques au niveau du curriculum d'une manière plus générale (Ongstad, 2007b). Ce texte primordial ira même jusqu'à suggérer des stratégies pour que la langue d'enseignement des mathématiques contribue à un cadre général pour la ou les langues de scolarisation. Celui-ci s'inspirera en partie des travaux publiés dans *Education Studies in Mathematics*, *Mathematics and Mathematics Education as Triadic Communication*? (Ongstad, 2006).

Angleterre

En Angleterre, l'enseignement primaire s'adresse aux enfants de 5 à 11 ans (autour des deux niveaux seuil que sont les Key Stages, KS1 et KS2), tandis que les établissements d'enseignement secondaire public (*comprehensive schools*) accueillent les enfants de 11 à 16 ans (KS3 et KS4). Les programmes d'étude définis par le National Curriculum décrivent ce qui doit être enseigné aux élèves. Ce que l'on appelle les objectifs d'acquisition (*attainment targets*, AT) indiquent les normes de performance attendues des élèves (en guise d'aboutissement de l'enseignement et de l'apprentissage). Pour les mathématiques, ces normes sont au nombre de quatre : utilisation et application des mathématiques ; nombres et algèbre ; formes, espaces et mesures ; et traitement de données. Chacun des AT consiste en la description de huit niveaux de difficulté croissante, plus, au-dessus du niveau huit, la description de la performance exceptionnelle.

Quatre niveaux seuil graduent les apprentissages réalisés au fur et à mesure des années. KS3 et KS4 sont décrits dans la *Secondary National Strategy* (stratégie nationale pour l'enseignement secondaire). Avec le KS3, qui semble le niveau le plus proche de la fin de l'enseignement obligatoire dans d'autres pays européens, l'objectif est de tirer les normes vers le haut en renforçant l'enseignement et l'apprentissage dans l'ensemble du curriculum pour tous les élèves de 11 à 14 ans.

Excepté des formulations du type ... *les mathématiques offrent aux élèves la possibilité d'acquérir des capacités clés dans les domaines suivants : la communication, en apprenant à exprimer des idées et des méthodes avec précision, sans ambiguïté et avec concision, et le travail avec les autres, grâce à des activités en groupe et des discussions sur les idées mathématiques…* la question de la langue et de la communication n'apparaît pas très importante dans le programme national de mathématiques en Angleterre au niveau KS3. Néanmoins, d'autres formulations traduisent une conscience du rôle de la langue et de la communication, et notamment... *Interpréter, discuter et résumer des informations géométriques… communiquer avec le langage mathématique en utilisant les diagrammes géométriques et les textes explicatifs associés… utiliser un langage précis et des méthodes exactes pour analyser des configurations géométriques…* et… *justifier ses choix*.

Birgit Pepin en conclut que :

> (...) le National Curriculum (statutaire) et la *National Strategy* (non statutaire) s'intéressent à la langue et à la communication pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il est intéressant de noter que la préoccupation majeure de la National Strategy est l'apprentissage, par les enfants, du vocabulaire mathématique juste (exemples : symétrie, équivalence, égalité, proportionnalité, coïncidence, similitude et linéarité).

Dans une certaine mesure, des aspects de la communication comme la discussion et l'interprétation, le raisonnement et la démonstration, ont voix au chapitre, mais l'accent est mis au premier chef sur les éléments du langage (exemples : *si… alors, puis, parce que, par conséquent, implique*, ou *et si ?* et *pourquoi* ?). Même si le National Curriculum affirme que le gros de l'effort est axé sur la communication au moyen du langage mathématique, et l'utilisation d'un langage mathématique précis, Birgit Pepin a le sentiment que la langue prime sur la communication. Qui plus est, elle doute que les intentions affichées par le National Curriculum soient relayées dans la salle de classe.

Certes, la littératie, la langue, la communication et les mathématiques sont décrits dans les programmes du primaire, et les relations entre la langue et les mathématiques sont largement évoquées. Mais leur place semble se réduire à peau de chagrin dans l'enseignement secondaire/KS3, où les mathématiques comme discipline en soi sont l'aspect privilégié.

Suède

Considérant l'objectif des mathématiques et leur rôle dans l'éducation, l'enseignement obligatoire, en Suède, a pour mission de :

> (…) apporter aux élèves les connaissances mathématiques nécessaires pour prendre des décisions motivées face aux choix de la vie quotidienne, pour interpréter et utiliser le flux croissant d'informations et être en mesure de suivre et de participer aux processus décisionnels dans la société. Il devrait fournir des bases solides pour l'étude d'autres matières, pour la formation continue et l'apprentissage tout au long de la vie (*Skolverket*, Direction nationale de l'enseignement scolaire, 2007).

Hudson et Nyström (2007) relèvent l'importance accordée aux mathématiques, dans le cadre de la culture et de l'éducation au sens large, en tant que moyen d'éclairer l'évolution de la discipline dans l'histoire, sa signification et son rôle dans la société.

La matière vise à développer l'intérêt de l'élève pour les mathématiques, de même qu'à créer des opportunités de communication au moyen du langage et des expressions mathématiques. Son ambition est aussi de permettre à l'élève de découvrir les valeurs esthétiques des structures, des formes et des relations mathématiques, mais aussi de faire des expériences et de connaître la satisfaction et la joie de comprendre et de résoudre des problèmes (Skolverket, 2007).

Bien que soit soulignée l'importance de pratiquer et de communiquer avec le langage mathématique dans les situations qui s'y prêtent, le chapitre concernant les *objectifs à atteindre* ne fait aucune référence explicite à la communication – ce que Hudson et Nyström estiment quelque peu surprenant compte tenu des objectifs affichés. De plus, il n'est fait aucune mention claire des aspects de la langue et de la communication, que ce soit dans la section consacrée à la structure et à la nature de la matière ou en relation avec les objectifs à atteindre à la fin de la toute première phase ou à la fin de l'enseignement obligatoire.

Il est à noter cependant une référence précise à la valeur de la communication *orale* dans les critères énoncés à la section concernant la capacité des élèves à utiliser, développer et exprimer des connaissances mathématiques : *l'importance du savoir mathématique réside notamment dans la capacité de l'élève à exprimer ses pensées oralement et par écrit, avec l'aide du langage mathématique des symboles étayé par des supports concrets et des images.*

Le système national d'*évaluation* fournit des exemples de tâches mathématiques particulièrement propices à la communication. Les tests nationaux en la matière sont conçus pour couvrir une grande partie du plan de cours ; généralement dénués d'enjeu, ils concordent dans une large mesure avec le curriculum. L'annexe 1 en fournit des exemples (Hudson et Nyström, 2007).

Roumanie

Dans son étude, Florence Mihaela Singer (2007a) constate que les nouvelles philosophies de l'éducation promues par le National Curriculum mettent davantage l'accent sur la langue dans l'ensemble du programme. Ainsi, parmi les quatre objectifs-cadres associés aux mathématiques dans l'enseignement obligatoire, l'un (souligné ci-après) concerne clairement la communication : Connaissance et utilisation des concepts mathématiques ; Développement des capacités d'exploration, d'investigation et de résolution des problèmes ; <u>Communication au moyen du langage mathématique</u> ; et Développement d'un intérêt et d'une motivation pour l'étude des mathématiques et leur application à divers contextes.

Après avoir étudié dans le détail les relations entre les mathématiques et la langue et la communication dans les différentes parties du programme écrit, Florence Mihaela Singer en arrive à une conclusion en six points. (Ces aspects de la langue et de la communication s'inspirent dans une certaine mesure de concepts développés dans des textes plus anciens de S. Ongstad et H. Vollmer.) :

> *La langue en tant que communication directe, moyen d'échanger des idées et de dialoguer avec les autres, de construire ensemble le sens, à deux, en groupes restreints ou avec la classe au complet, de négocier le sens*. Parmi les quatre objectifs-cadres, l'un est la communication au moyen du langage mathématique. Celui-ci, comme les autres, va être réalisé progressivement du premier au dernier niveau de l'enseignement obligatoire.
>
> *La langue en tant qu'expression de l'entendement et de la compréhension de textes*. Certains objectifs-cadres insistent sur la lecture et la rédaction de textes mathématiques, ainsi que sur le décodage de textes mathématiques avec l'aide d'opérateurs logiques et de quantificateurs.
>
> *La langue en tant que contenu (disciplinaire) – en particulier, termes/significations et expressions de base.* L'objectif-cadre « Connaissance et utilisation des concepts

mathématiques » met en avant la langue en tant que traduction de la structure d'un sujet ou d'un thème dans les activités d'apprentissage centrées sur la terminologie.

La langue en tant que pragmatique discursive, réalisation des fonctions fondamentales du discours (comme nommer, définir, décrire, expliquer, soutenir, supposer, évaluer, etc.) ; ce concept apparaît dans plusieurs exemples d'activités d'apprentissage proposées par le programme de chaque matière aux différents niveaux.

Les aspects liés à la langue, comme la créativité (le rhème, élément nouveau caractérisant le thème–rhème ou dynamique considérée comme inédite), la langue en tant qu'outil et moyen pour développer, créer et exprimer de nouveaux concepts et perceptions. L'objectif-cadre « Développement des capacités d'exploration, d'investigation et de résolution des problèmes » renvoie précisément à ces aspects.

La langue pour mener une réflexion (critique) sur la matière et son propre apprentissage est un concept mis en avant par l'objectif-cadre « Développement d'un intérêt et d'une motivation pour l'étude des mathématiques et leur application à divers contextes ». Les objectifs axés sur la communication et le développement d'attitudes sont essentiels à la métacognition et touchent au fondement même de l'éducation au 21^{e} siècle (Singer, 2007, ce volume).

Norvège

Sigmund Ongstad (2007a) note en guise de conclusion que le nouveau programme national de mathématiques (LK06), en vigueur en Norvège depuis 2006, donne la priorité absolue au contenu de la discipline *(disciplinarity*) dans ses trois sections : « Objectifs », « Contenu » et « Compétences cibles ». En revanche, la quatrième section consacrée aux « Compétences de base » met clairement en avant la langue et la communication – ou la discursivité. *La cohabitation de deux objectifs distincts introduit une incertitude quant à l'intention principale du programme* : sont-ce les objectifs ou les compétences ? Le chapitre sur les compétences de base, qui donne la priorité aux compétences linguistiques et communicationnelles, pourrait être interprété comme une « ingérence » dans les mathématiques (voire dans les autres matières au programme) destinée à les exploiter à la manière d'<u>outils</u> et de médiateurs d'une enculturation plus large (ou peut-être même d'une « *Bildung* »), très loin d'une pure et simple connaissance unidisciplinaire. En conclusion, il semble que soit opérée une *distinction* entre les aspects en question.

Dans son étude, Sigmund Ongstad compare les deux derniers programmes nationaux. Même si une certaine « ligne de développement » se dessine, du précédent programme de 1997 (L97) jusqu'à l'actuel (LK06), il semble que l'orientation *conceptuelle* relativement claire qui caractérisait le L97 ait disparu. En conséquence, le LK06 semble donner moins de poids à une épistémologie consciente fondée sur la *sémantique* qui aurait pu jeter une passerelle entre la langue et les mathématiques.

D'une manière générale, une approche « communicative » plutôt formelle et assez générale semble avoir remporté une victoire chèrement acquise, surtout dans un domaine particulier du curriculum. C'est probablement dans le curriculum norvégien que ce type de division est le plus fort, mais il n'en est pas moins une tendance générale dans les quatre curriculums étudiés. Cependant, si les futures évaluations norvégiennes doivent aboutir à un recentrage sur les compétences de base (plutôt que sur les connaissances purement mathématiques), alors les ambitions communicationnelles pourraient rapidement devenir plus pertinentes.

Interprétation générale

Les quatre curriculums contiennent quelques rares références explicites à la langue et à la communication. Celles-ci apparaissent principalement dans les parties générales (introductions), qui font un lien entre les matières et l'apprenant, le monde et la société (les « mondes vivants »). Plus l'on va vers des buts et des objectifs spécifiques (souvent énumérés au moyen de '*bullet points'*), plus l'accent est mis sur les mathématiques en tant que telles. Dans le National Curriculum anglais, le programme du primaire accorde une place importante à la langue et à l'apprentissage dans les différentes disciplines ; en revanche, au niveau KS3 (début de l'enseignement secondaire), on constate une nette distinction et un fort déséquilibre entre les mathématiques et la communication. Les curriculums suédois et norvégiens ont également tendance à distinguer les mathématiques de la langue. Le programme roumain de mathématiques semble, du moins sur la forme, vouloir accorder plus d'attention à la communication comme dimension des mathématiques en tant qu'activité didactique.

En Norvège, l'idée d'introduire le concept de communication dans les mathématiques provient pour l'essentiel de tendances générales concernant les programmes et l'enseignement *extérieures* à la discipline – idée généralement *imposée* aux diverses matières enseignées. De cette situation découle une fracture significative au sein du curriculum, en ce que chaque partie a des intentions et des implications propres. On pourrait dire du programme anglais de mathématiques qu'il met l'accent plus sur la *langue* que sur la communication, comme le montre notamment la priorité donnée à la clarté et à la précision dans le travail avec des concepts fondamentaux. Le curriculum suédois, comme le norvégien, accorde une place prioritaire à la langue et à la communication dans l'introduction mais pas dans les parties qui suivent. Cela étant, une différence de taille les distingue : le curriculum norvégien a explicitement *modifié* la relation entre la matière et les objectifs curriculaires plus généraux (à savoir, les *compétences de base*). Dans cette partie spécifique du curriculum, les mathématiques se voient contraintes de se considérer comme un moyen – ambition que ne soutiennent pas les autres parties, plus « cruciales ».

Tous les curriculums donnent de très brèves descriptions du contenu de la discipline, pour l'essentiel sous forme de messages d'information concis et concrets ou au moyen de signets. Ce « discours » est dominé par une « terminologie » disciplinaire bien connue de la plupart des enseignants. Cette terminologie, à la manière implicite d'un acte langagier, semble donner des orientations précises quant à la nature du programme. De ce fait, les curriculums manquent plutôt de clarté sur ce qui est important et n'établissent pour ainsi dire aucune hiérarchie entre les priorités. Certes, tous les curriculaires nationaux, dans leurs parties générales, donnent explicitement la priorité aux besoins et aux intérêts de l'apprenant et de la société. Mais, dans ce cadre curriculaire « horizontal », la discipline mathématique semble libre d'établir son propre programme. Dans ces conditions, les ambitions affichées pour introduire la langue et la communication dans le programme de mathématiques ne sont pas réellement soutenues.

Une discussion stratégique globale sur les enjeux sera proposée dans la contribution de Ongstad (2007b) qui, une nouvelle fois, fera partie d'une analyse générale de la langue dans le curriculum. Pour commencer seront examinés les enjeux ci-après.

Quelques questions clés

A Tous les curriculums étudiés reconnaissent aux mathématiques un rôle de premier plan dans la culture et la société et soulignent (à des degrés divers) les liens importants entre les mathématiques en tant que discipline et matière scolaire, d'une part, et la langue et la communication, d'autre part. Ce que cela signifie concrètement n'est pas évident, d'autant que certains indices trahissent une reconnaissance de pure forme de l'importance de la communication. Par ailleurs, la formulation rhétorique de cet aspect pourrait ne pas être étrangère aux jeux de pouvoir et à la lutte acharnée qui se déroulent dans les coulisses des processus de réforme.

B. Dans les quatre pays, le curriculum national général donne la priorité aux compétences de base ou aux compétences clés. Seule la Norvège confirme cette volonté dans les sections consacrées aux disciplines, en conférant (plutôt formellement) aux compétences de base un rôle essentiel dans l'ensemble du curriculum et donc dans le programme de mathématiques. Cette situation pose un problème de priorité (signalée par la structure hiérarchique) entre les différentes parties du curriculum. Avec le nouveau « design » des curriculums (plus courts, plus clairs) qui prévaut dans tous les pays et les batailles silencieuses entre évaluations sommative et formative, il devient difficile pour les enseignants d'établir des priorités et de déterminer dans quelle mesure intégrer les deux ambitions.

C. Il y a lieu de croire que les mathématiques posent plus de problèmes que les autres matières quant à l'intégration de – ou l'interface avec – la langue et la communication. On observe par exemple, dans les parties concernant le contenu du programme de mathématiques, une forte volonté de décrire la discipline plutôt que de la mettre en relation avec les divers contextes de communication. Qui plus est, les perceptions de ce que pourraient être la langue et la communication semblent être, si ce n'est dépassées, du moins plutôt fragmentées et circonstancielles. Enfin, il est tentant de croire que, parmi les professeurs de mathématiques du secondaire et d'autres qui contribuent à la définition du curriculum, une forte priorité est donnée au *contenu de la discipline*. La discipline, avec les éléments qui la composent, est souvent appréhendée comme un « gratte-ciel » plutôt que comme une rangée de maisons. Cette conception « verticale » laisse probablement moins de place à la perception de l'éducation mathématique comme l'assemblage d'aspects issus d'autres domaines de la connaissance (comme la sociologie et la linguistique). Dans ces conditions, pourquoi de nombreux *théoriciens* de la langue dans l'enseignement des mathématiques jugent-ils la communication et la sémiologie, en bref la discursivité, cruciales voire incontournables ? Voilà qui donne à réfléchir.

Quels sont les aspects importants ?

Plusieurs aspects importants de la langue et de la communication méritent d'être approfondies et clarifiés, et notamment : *le concept, le contexte, la discursivité* et *la sémiologie*. Mais ceux-ci ne peuvent être décrits séparément les uns des autres du point de vue théorique. Il faut au contraire les relier à d'autres processus essentiels, didactiques et conceptuels, comme *l'enseignement, les développements de la discipline* (*disciplining)* et *l'apprentissage*.

Les perceptions éducatives des *concepts* mathématiques ont pâti de la prédominance d'une vision cognitive et sémantique parmi les éducateurs – en majorité recrutés dans la sphère de la discipline. En Europe, nombreuses sont les formations des enseignants qui confèrent une place importante au socioconstructivisme dans les mathématiques. Pour autant, cela n'a pas eu de réel impact sur la façon dont les différents curriculums ont formulé les concepts fondamentaux qui permettraient l'intégration des éléments de la langue et de la communication dans les mathématiques en tant que discipline scolaire.

Le rôle du *contexte* est partiellement relié à ce problème. Si, dans les années 70, la sociologie prenait conscience du rôle du milieu social dans la conceptualisation par les enfants, le désir de parvenir à une compréhension plus poussée semble s'être estompé dans les années 80 et

90. Pour la rédaction des curriculums et des manuels, ce déficit de compréhension a généré une perte d'intérêt pour la signification culturelle des concepts clés du processus d'apprentissage.

Mais l'importance du contexte va bien au-delà. Une récente évaluation conduite auprès de professeurs de mathématiques au RU a montré le renforcement de leur conscience du rôle du contexte. Le problème est qu'avec une compréhension traditionnelle et simpliste de la notion de contexte, à la manière d'une sorte de boîte, de lieu ou d'environnement physique, une perspective discursive, sémiologique et communicationnelle est quasi-inaccessible. Sous cet angle, un concept mathématique va souvent « appartenir » à un genre ou discours mathématique particulier (qui devient ainsi un contexte). Qui plus est, cette forme de communication peut relever d'un cadre discursif éducatif particulier. Quant à l'école, en tant qu'institution, elle fera partie d'une certaine sorte de société. Et ainsi de suite. Du point de vue didactique, il est difficile de gérer correctement ce contexte « gigogne » sans une compréhension plus large de ses dimensions discursives, sémiologiques et communicationnelles.

L'apprentissage des mathématiques peut ainsi sembler imprégné d'une constante *discursivité* : on ne peut pas ne pas utiliser les genres mathématiques, on ne peut pas ne pas communiquer sous la forme mathématique, tout acte mathématique est en un sens un énoncé, tout concept est à la fois mathématique *et* linguistique ; les mathématiques ne sont pas simplement un langage en soi, elles sont une activité langagière et discursive. Et elles contribuent à la langue.

Une approche est susceptible d'aider à combler le fossé entre la langue et les mathématiques : il s'agit de la *sémiologie*. Sous cet angle, l'apprentissage des mathématiques peut être perçu comme un processus culturel impliquant des signes. Le processus d'enculturation de l'enfant à la maternelle repose sur une expérience ethno-mathématique où les entités basiques sont formées des lettres, des mots, des chiffres et des images, autrement dit des *signes*. L'unité sémiologique pourrait ainsi être le point de départ simple de tout enseignement mathématique à l'école, que le curriculum national prenne ou non cela en considération. La portée plus large de la sémiologie pourrait aussi aider à contrer une attitude quelque peu négative à l'égard de la « langue » dans certaines disciplines. Mais la *sémiologie* reste pour l'instant un mot relativement méconnu ; l'on ne peut donc s'attendre à ce qu'il soit largement utilisé et compris. Aussi, sa principale fonction pourrait-elle être de soutenir l'idée qu'il est nécessaire d'*élargir* l'horizon au-delà du langage « simplement » verbal à la communication sémiologique.

Présentés séparément, il est probable que les quatre concepts précités n'aideront pas beaucoup à rapprocher les mathématiques et la communication. *Enseigner* les mathématiques doit être considéré comme un acte de communication. *Développer la discipline/la matière* des mathématiques doit être considéré comme de la communication. *Apprendre* les mathématiques doit être considéré comme de la communication. Exprimés séparément, ces trois aspects n'en sont pas pour autant des modes ou des processus de communication *différents*. Même s'il est possible (et parfois adapté) de privilégier l'un ou l'autre, séparément, ces processus se produisent *simultanément*. En clair, faire des mathématiques, qu'il s'agisse de recherche ou d'apprentissage, doit être considéré comme un acte de communication et non simplement comme quelque chose qui, dans une certaine mesure, peut être transmis au moyen de la langue. Pour bien faire comprendre cela aux professeurs de mathématiques (et aux autres), les éléments linguistiques *implicites* des curriculums et des manuels, de l'enseignement et de l'apprentissage, doivent être « ramenés en surface » au moyen d'un cadre conceptuel.

La recherche mathématique actuelle et l'utilisation quotidienne des mathématiques dans l'éducation et la société contribuent à la culture aux plans de la sémiologie et de la communication, favorisant leur cohérence, en entrelaçant leurs aspects disciplinaires et discursifs. *Quels* seront les aspects les plus importants, pertinents et adaptés aux différents contextes, c'est là une question *didactique* cruciale. Mais y répondre de façon convaincante est difficile sans un cadre conceptuel plus finement tracé.

L'enjeu de la formation pédagogique des enseignants était de parvenir à un traitement à la fois spécifique et général des différentes matières. La langue d'enseignement aura tout autant de difficultés à trouver un équilibre conceptuel satisfaisant entre approche mathématique spécifique et contenu disciplinaire général. Une question cruciale sera de déterminer les concepts adaptés pour décrire les modes de communication généraux dans les matières, et lesquels sont simplement valides et pertinents dans certains sous-champs d'étude. Pour y répondre, il faudra se référer explicitement au contenu de la discipline tout en examinant comment communiquer à travers les frontières en Europe dans les différentes disciplines.

Bibliographie

Hudson, B. and Nyström, P. (2007) *La langue dans les mathématiques en Suède*. Texte dans cette publication. Conseil de l'Europe : www.coe.int/lang/fr

Ongstad, S. (2006) « *Mathematics and Mathematics Education - Language and/or Communication? Triadic Semiotics Exemplified* ». *Educational Studies in Mathematics, 61/1-2*.

Ongstad, S. (2007a) *Langue et communication dans les programmes de mathématiques en Norvège*. Texte dans cette publication. Conseil de l'Europe : www.coe.int/lang/fr

Ongstad, S. (2007b) *Disciplinarity versus discursivity?* Conseil de l'Europe : www.coe.int/lang/fr

Pepin, B. (2007a) *Les langues dans le programme de mathématiques en Angleterre*. Texte dans cette publication. Conseil de l'Europe : www.coe.int/lang/fr

Pepin, B. (2007b) *Culture, language and mathematics education: aspects of language in English, French and German mathematics education.* Texte dans cette publication, disponible en anglais seulement. Conseil de l'Europe : www.coe.int/lang/fr

Skolverket (2007) *KUSINFO 2006/07*, http://www3.skolverket.se/ki03/front.aspx?sprak=EN

Skolverket (2005) *National Assessment and Grading in the Swedish School System*, http://www.skolverket.se

Singer, F. M. (2007a) *La langue dans le programme de mathématiques en Roumanie*. Texte dans cette publication. Conseil de l'Europe : www.coe.int/lang/fr

Singer, F. M. (2007b) *Language across the mathematics curriculum : some aspects related to cognition*. Texte dans cette publication, disponible en anglais seulement. Conseil de l'Europe. www.coe.int/lang/fr

Utdanningsdirektoratet (2007) *Mathematics Subject Curriculum.* (LK06). Visited 31.05.07. www.udir.no/.../Fastsatte_lareplaner_for_Kunnskapsloeftet/english/Mathematics_subject_curriculum.rtf

La langue dans le programme de mathématiques en Angleterre

Birgit Pepin

> « L'enseignement mathématique commence avec la langue, il progresse et rencontre des difficultés à cause de la langue, et ses aboutissements sont souvent évalués au moyen de la langue. » (Durkin, 1991, p.3)

La langue joue un grand rôle dans l'apprentissage des mathématiques et leur compréhension. Elle est aussi le principal vecteur des relations entre les apprenants, d'une part, et entre les enseignants et les apprenants, d'autre part. Dans certains pays, il y en a qui soutiennent (Setati, 2005, Afrique du Sud) que la langue a une fonction politique qui prévaut sur son rôle de construction des connaissances et d'instrument de communication. Setati attire l'attention sur l'importance du pouvoir de la langue dans les cadres de l'enseignement des mathématiques, et donc sur la nécessité d'étudier plus avant les relations entre la langue, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques pour « cerner la dimension politique de ces relations » (p.74, ibid). Consciente de la réalité des préoccupations de Setati sans pour autant vouloir entrer dans le débat politique, je souhaiterais étudier les aspects de la langue et de la communication dans le programme de mathématiques en Angleterre et les documents de la Stratégie nationale relatifs au Key Stage 3. A en croire Durkin, il n'y a pas d'apprentissage des mathématiques sans la langue et/ou la communication.

Avant d'analyser en détail le programme national de mathématiques pour l'Angleterre sous l'angle de la langue et de la communication, je voudrais présenter sa structure et son contenu. Pour le Gouvernement, le National Curriculum est au cœur des politiques déployées dans l'objectif de tirer les normes vers le haut ; il énonce le droit statutaire qu'ont tous les enfants d'apprendre (p. 3). En Angleterre, l'enseignement primaire s'adresse aux enfants de 5 à 11 ans (autour des deux niveaux seuil que sont les Key Stages, KS1 et KS2), tandis que les établissements d'enseignement secondaire général (comprehensive schools) accueillent les enfants de 11 à 16 ans (KS3 et KS4). Les programmes d'étude définis par le National Curriculum décrivent ce qui doit être enseigné aux élèves, tandis que les objectifs d'acquisition (attainment targets, AT) indiquent les normes de performance attendues des élèves (p. 6). En mathématiques, ces objectifs sont au nombre de quatre :

- Utilisation et application des mathématiques (*Using and applying mathematics*, UAM) ;
- Nombres et algèbre (Number and algebra, NA) ;
- Formes, espaces et mesures (*Shape, space and measures*, SSM) ;
- Traitement de données (*Handling data*, HD).

Chacun des AT consiste en la description de huit niveaux de difficulté croissante, plus, au-dessus du niveau huit, la description de la performance exceptionnelle. Chaque niveau décrit la nature et l'ampleur des performances que devraient en règle générale réaliser les élèves scolarisés à ce niveau (DfEE, 1999, p. 7)

Le tableau ci-après donne un aperçu des acquisitions attendues des élèves aux différents âges de leur scolarité :

	Fourchette des niveaux dans lesquels la grande majorité des élèves est censée travailler		Acquisitions attendues de la majorité des élèves à la fin de chacun des Key Stages
Key Stage 1	1-3	à 7 ans	2
Key Stage 2	2-5	à 11 ans	4
Key Stage 3	3-7	à 14 ans	5/6
Key Stage 4		à 16 ans	Qualifications nationales (GCSE) – Certificat général d'enseignement secondaire

Mais le National Curriculum met aussi en avant l'apprentissage « dans l'ensemble du programme » dans plusieurs domaines et décrit en quoi l'enseignement des mathématiques peut contribuer à l'apprentissage dans l'ensemble du curriculum (p. 8).

Le programme national de mathématiques pour l'Angleterre (DfEE, 1999) vise à promouvoir des capacités clés par le biais des mathématiques (p. 8), autrement dit l'apprentissage dans l'ensemble du curriculum ; les mentions suivantes concernent la communication et la langue :

« … les mathématiques offrent aux élèves la possibilité d'acquérir des compétences clés dans les domaines suivants :

- *la communication*, en apprenant à exprimer des idées et des méthodes avec précision, sans ambiguïté et avec concision…
- …
- *et le travail avec les autres*, grâce à des activités en groupe et des discussions sur les idées mathématiques… »
- … "   (ibid, p.8)

A ce stade, la signification de la formulation « exprimer des idées et des méthodes avec précision, sans ambiguïté et avec concision » n'apparaît pas clairement, pas plus que les opportunités offertes aux apprenants pour apprendre à le faire. Néanmoins, la communication et la discussion sont mentionnées comme des aspects importants de l'apprentissage des mathématiques.

Aujourd'hui, les chercheurs (Pimm, 1987 ; Adler, 2001 ; Sfard, Nesher, Streefland, Cobb et Mason, 1998) et les concepteurs des curriculums (NCTM, 1991, 2000 ; DfEE, 1999) considèrent généralement le fait de communiquer au moyen des mathématiques comme un élément central de ce que signifie apprendre les mathématiques. Après examen des programmes d'étude correspondant aux différents Key Stages, le tableau ci-après résume les mentions relevées relativement à la langue et à la communication.

Mathématiques – le National Curriculum pour l'Angleterre (www.nc.uk.net)

	Mentions générales	Communication	Raisonnement/ ailleurs
Key Stage 1	« parler de… » « décrire… » « employer les mots de tous les jours pour exprimer une position »		
Ma2 (Nombres) Ma3 (SSM)		« Utiliser une langue correcte, des symboles et le vocabulaire afférent aux nombres et aux données » Communiquer de manière orale, graphique et écrite, en utilisant d'abord un langage ou un mode de présentation informels, puis au moyen du langage et des symboles mathématiques »	Expliquer … Décrire … Discuter …
Key Stage 2			
Ma2 (NA)		« Communiquer par les mathématiques, y compris au moyen d'un langage mathématique précis » « …et décrire… » « … expliquer ses méthodes »	« méthodes écrites »
Ma3 (SSM)			« Utiliser le raisonnement mathématique pour expliquer des caractéristiques de forme et d'espace » « Visualiser et décrire des formes en 2 et 3 dimensions… »
Key Stage 3			
Ma2 (NA)		« Représenter des problèmes et des solutions sous forme algébrique ou graphique… »	(méthodes écrites) « Résoudre les problèmes posés par les mots de

		« … justifier… présenter… »	rapport et proportion… » « Relier la représentation graphique d'une équation à ses solutions algébriques… »
Ma3 (SSM)		« Interpréter, examiner et synthétiser des informations géométriques… » « Communiquer avec les mathématiques en utilisant les diagrammes géométriques et les textes explicatifs associés » « Utiliser un langage précis et des méthodes exactes pour analyser des configurations géométriques » « … justifier ses choix… »	« Expliquer et justifier des inférences… »
Ma4 (HD)		« Interpréter, examiner et résumer… » « Communiquer avec les mathématiques… » « Examiner de façon critique et justifier… »	
Key Stage 4			
Ma2 (NA)		« Interpréter et examiner… » « Utiliser les notations et les symboles correctement… »	(utilisation des symboles) (notation des indices)
Ma3 (SSM)		« Interpréter, examiner et résumer… » (comme ci-dessus)	
Inclusion	(développer la compréhension) « Utiliser des descriptions et d'autres stimuli à imaginer pour… » (améliorer l'anglais parlé et écrit) « … opportunités effectives de s'exprimer et que l'expression orale soit utilisée pour étayer l'écrit… » (garantir l'accès) « Utiliser des textes et des supports accessibles… »		

Utilisation de la langue dans l'ensemble du curriculum	• Ecrire • Parler • Ecouter • Lire « … il faut enseigner aux élèves le jargon technique et spécialisé… »		
Stratégie nationale KS3 : cadre pour l'enseignement des mathématiques (7, 8, 9 ans)	Liste de pointage du vocabulaire important « Les élèves doivent être capables d'utiliser les termes et les notations mathématiques corrects et de formuler ce qu'ils comprennent plutôt que de simplement répondre par un mot » Le texte du National Curriculum sur la langue suggère d'inclure dans l'enseignement de toutes les matières les trois aspects ci-après : • Précision du langage utilisé (parlé, écrit, lu) • Termes et concepts techniques adaptés au sujet • Conscience des structures linguistiques (mention également de la langue concernant les enfants avec des difficultés de communication)		Capacités de raisonnement « Elles permettent aux élèves d'exposer les raisons de leurs avis et actions… et d'utiliser une langue précise pour raisonner. »

Ce tableau montre que le *National Curriculum* (statutaire) et la *National Strategy* (non statutaire) s'intéressent à la langue et à la communication pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il est intéressant de noter que la préoccupation majeure de la National Strategy est l'apprentissage, par les enfants, du vocabulaire mathématique juste (exemples : *symétrie, équivalence, égalité, proportionnalité, coïncidence, similitude et linéarité*).

Si le *National Curriculum* met en avant le vocabulaire des mathématiques pour aider les élèves à s'exprimer clairement, il insiste quand même davantage sur les aspects de la communication que sont la discussion et l'interprétation, et plus encore le raisonnement et la démonstration. La discussion est identifiée comme l'une des capacités clés acquises dans le cadre du *travail avec les autres*, à l'occasion d'activités en groupe par exemple. Mais le *National Curriculum* ne précise pas où doivent se dérouler ces discussions, mettant l'accent sur la formation professionnelle de l'enseignant dans les orientations pédagogiques. Cela étant, le National Curriculum affirme que le gros de l'effort est axé sur *la communication au moyen du langage mathématique, et l'utilisation d'un langage mathématique précis*, à tous les niveaux. Concernant le raisonnement et la démonstration, l'attention des élèves est attirée sur les formulations du raisonnement et de la démonstration mathématiques, par exemple : *si… alors, puis, parce que, par conséquent, implique*, ou *et si ?* et *pourquoi ?* Cet accent va en augmentant au fur et à mesure des *Key Stages*.

Globalement, j'ai le sentiment que la langue prime sur la communication. Néanmoins, dans les écoles, j'observe peu d'enseignants qui mettent en avant le langage mathématique, excepté dans les meilleures. Pour l'essentiel, ce sont des expressions du langage commun qui sont utilisées, comme « le chiffre du haut » et « le chiffre du bas » au lieu de numérateur et dénominateur, respectivement. Qui plus est, si les documents nationaux proclament leur attachement au travail en groupe et à la communication avec les autres, en réalité, dans la salle de classe, l'enseignant passe très peu de temps au développement de ces capacités. Les écoles s'attachent à « faire le programme » et à gérer les problèmes de comportement des élèves perturbateurs. La priorité numéro un est de parvenir à ce que les élèves réussissent leurs examens. Les pratiques qui privilégient davantage la communication et sont susceptibles de faire appel au travail en groupe ou, plus généralement, qui permettent aux élèves de discuter de leur travail entre eux, sont perçues comme des freins. Qui plus est, et si les élèves ne sont pas familiarisés à ces méthodes pédagogiques, les enseignants craignent que ceux-ci ne se concentrent pas suffisamment sur la tâche et ne participent pas suffisamment s'ils sont autorisés à discuter de leur travail.

« Les mathématiques sont le véritable langage global. Avec les mathématiques, nous communiquons des idées que les mots ne peuvent traduire, nous jouant de la fameuse Tour de Babel » (Professeur Alison Wolf, directeur du groupe des sciences mathématiques, Institut de l'éducation, Université de Londres) (DfEE, 1999, p.15)

Bibliographie

Adler, J. (2001) *Teaching mathematics in multi lingual classrooms*, Dordrecht: Kluwer.

Department for Education and Employment (DfEE) (1999) *Mathematics- The National Curriculum for England*, London: DfEE and QCA.- www.nc.uk.net

DfEE (2001) *Key Stage 3 National Strategy*- Framework for teaching mathematics: Years 7, 8 and 9. London: DfEE.

Durkin, K. (1991) Language in mathematics education: an introduction. In Durkin, K. & Shire, B. (eds) *Language in mathematics education*, Milton Keynes: Open University Press.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991) *Professional Standards for teaching mathematics,* Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000) *Principles and standards for school mathematics,* Reston, VA: NCTM.

Pimm, D. (1987) *Speaking mathematically: communication in mathematics classrooms,* London and New York: Routledge & Kegan Paul.

Setati, M. (2005) Mathematics education and language: policy, research and practice in multilingual South Africa, in Vithal, R., Adler, J. & Keitel, C. (eds) *Researching mathematics education in South Africa*, Cape Town, SA: HSRC.

Sfard, A., Nesher, P., Streefland, P., Cobb, P. & Mason, J. (1998) Learning mathematics through conversation: is it good as they say? *For the learning of mathematics*. London: Ward Lock Educational.

La langue dans le programme de mathématiques en Suède

Brian Hudson et Peter Nyström

1. Schéma directeur

Le système éducatif suédois décrit par *Skolverket* (2007) est axé sur des objectifs précis et fait une large place à l'autonomie locale. Il relève en effet principalement de la compétence des communes et des instances responsables des écoles privées.

Les grands objectifs du système éducatif, au niveau national, sont définis par le Parlement et le gouvernement suédois dans les textes suivants :

- La Loi sur l'Education
- Les curriculums généraux
- Les programmes liés à la scolarité obligatoire – entre autres
- Les objectifs des programmes des lycées (second cycle de l'enseignement secondaire)

Par ailleurs, l'Agence nationale de l'Education élabore et se prononce sur :

- Les programmes des lycées – entre autres
- Les critères et niveaux des différentes catégories d'établissements scolaires du pays
- Les recommandations générales

Chaque municipalité élabore un plan scolaire local, définissant les modalités d'organisation et de développement des établissements scolaires de la commune en question. Sur cette base, les curriculums généraux, les programmes et plans scolaires laissent aux chefs d'établissement, aux enseignants et aux élèves de chaque école, collège ou lycée toute liberté pour adapter le contenu, l'organisation et les méthodes de travail aux situations locales. Ces différents éléments sont définis dans le cadre du plan de travail de chaque établissement scolaire. Le suivi s'effectue dans le cadre de Rapports qualitatifs annuels.

2. Curriculums

Les curriculums de l'enseignement obligatoire reposent sur l'affirmation des valeurs et missions fondamentales de l'école, elles-mêmes fondées sur les principes démocratiques de la société suédoise. Les curriculums s'articulent autour de trois grandes phases s'inscrivant dans les « *Lärorplaner* » suivants :

- Lpfö98 Curriculum de l'enseignement préscolaire
- Lpo94 Curriculum de l'enseignement obligatoire, des classes préscolaires et des centres de loisirs
- Lpf94 Curriculum de l'enseignement non obligatoire

3. Objectifs

Les connaissances à acquérir et à développer par les élèves s'expriment en termes d'objectifs (théoriques) à viser et d'objectifs (concrets) à atteindre. *Les objectifs théoriques à viser* constituent une orientation générale, pour chaque discipline, en termes d'acquisition d'un savoir par l'élève. Ces objectifs indiquent très précisément le type de connaissances indispensables pour maîtriser la discipline en question. Ils constituent le fondement même de l'organisation de l'enseignement de chaque discipline et ne fixent pas de limite au savoir que l'élève peut acquérir dans le domaine en question. En revanche, les *objectifs concrets à atteindre* correspondent au savoir minimum que tout élève doit posséder au terme de la cinquième année et de la neuvième année de scolarité. Autrement dit, on définit un niveau de connaissance minimal à atteindre dans les délais susmentionnés.

A l'heure actuelle, l'évaluation des connaissances au niveau national s'effectue à la fin des 5ème et 9ème années de la période de scolarité obligatoire (au terme de la 9ème année, l'élève a en principe 16 ans), mais il est prévu d'instaurer également des tests nationaux à l'issue de la 3ème année. Les travaux à cet égard sont déjà bien avancés.

4. Système de notation

Les mentions de réussite délivrées dans l'enseignement obligatoire sont les suivantes :

- Mention spéciale MVG
- Mention honorable VG
- Mention passable G

Les objectifs éducatifs à atteindre en fin de 9ème année servent de critère pour l'octroi ou non d'une mention de réussite. La majorité des élèves suédois vont en fait aller au-delà de cette 9ème année et sont censés poursuivre leur apprentissage.

5. Le Curriculum de mathématiques dans l'enseignement obligatoire : quelles sont, à ce niveau, les attentes explicites et implicites en matière de langue et d'apprentissage ?

5.1 Objet et rôle des mathématiques dans l'éducation

Pour ce qui concerne l'objet des mathématiques et leur rôle dans l'éducation, la mission de l'école obligatoire est la suivante :

… doter les élèves des connaissances mathématiques dont ils auront besoin pour prendre des décisions éclairées dans les choix à opérer dans la vie quotidienne, pour pouvoir interpréter et utiliser le flux croissant d'informations et être à même de comprendre les processus décisionnels et d'y participer. Les mathématiques doivent constituer une bonne base pour l'étude d'autres disciplines, pour l'enseignement postobligatoire et l'apprentissage tout au long de la vie.

En donnant aux élèves un aperçu de l'évolution de la discipline au fil du temps et de son rôle et de sa place dans la société, l'enseignement souligne l'importance des mathématiques en tant que composante de la culture générale et de l'éducation au sens large. L'un des objectifs essentiels est de développer l'intérêt de l'élève pour les mathématiques, en mettant en avant à cet égard les aspects linguistiques et communicationnels de l'enseignement de cette discipline.

Il s'agit donc de susciter l'intérêt de l'élève pour les mathématiques et de créer des occasions de communiquer dans la langue et les expressions mathématiques. L'enseignement doit également permettre à l'élève de découvrir la valeur esthétique des modèles, des formes et des relations mathématiques, et d'éprouver une véritable satisfaction, voire du plaisir dans le processus de compréhension et de résolution des problèmes.

Il importe de donner à l'élève la possibilité de pratiquer la science mathématique et de communiquer sur le mode mathématique dans des situations spécifiques : *L'enseignement des* *mathématiques doit permettre à l'élève d'utiliser ses connaissances dans ce domaine et de communiquer sur le mode mathématique face à des situations précises, ce, en s'employant activement et ouvertement à comprendre à trouver de nouvelles perspectives et de nouvelles solutions à divers types de problèmes.*

5.2 Principaux objectifs théoriques

Cela étant, l'analyse des *objectifs théoriques* ne fait pas apparaître de référence explicite au concept de communication. Ce qui est plutôt surprenant, en regard des objectifs expressément énoncés. Néanmoins l'enseignement des mathématiques doit permettre à l'élève d'*apprécier la valeur des formes d'expression mathématiques et de les utiliser*. Ces « formes » d'expression peuvent certes englober le langage, mais ce n'est pas forcément évident.

On trouve toutefois une référence explicite à la communication orale dans un autre « objectif théorique », celui qui concerne l'explication orale et la présentation d'arguments de réflexion : *l'élève doit développer son aptitude à comprendre, à construire et à mener un raisonnement logique, à formuler des conclusions et à faire des généralisations, ainsi qu'à exposer oralement et par écrit les arguments auxquels réfléchir.*

Les objectifs théoriques restants portent sur l'acquisition de compétences et la capacité de conceptualiser ; il n'y a pas d'autre référence explicite à la langue ou à la communication.

5.3 Structure et nature de la discipline

La partie distincte traitant de la structure et de la nature de la discipline met l'accent sur les mathématiques en tant que construction humaine vivante :

« Les mathématiques sont une construction humaine vivante associant créativité, intuition et activités de recherche. Elles sont aussi l'une de nos sciences les plus anciennes. Elles ont été considérablement stimulées par les sciences naturelles. En tant que discipline elles reposent sur les notions de « nombre » et d'« espace » et étudient des concepts aux propriétés clairement définies. Elles se caractérisent toutes par un certain degré d'abstraction. Les similarités observées entre différents phénomènes sont décrites et traduites en termes mathématiques. Le « nombre naturel » par exemple est une abstraction.

Autres aspects à souligner : l'application des mathématiques aux problèmes de la vie quotidienne, à la résolution de problèmes en général et à la définition de passerelles entre les différentes disciplines. Mais, là encore, contrairement au Curriculum du second cycle de l'enseignement secondaire, le Curriculum de l'enseignement obligatoire ne mentionne pas expressément les aspects relevant de la langue et de la communication.

5.4 Objectifs concrets que l'élève doit avoir atteints à l'issue de la 5e année de scolarité (c'est-à-dire à l'âge de 11 ans)

La fin de la 5e année de scolarité constitue aujourd'hui en Suède un premier cap à franchir avec des attentes expressément définies en mathématiques, bien qu'il soit prévu d'instaurer des tests nationaux d'évaluation des connaissances dès la fin de la 3e année (c'est-à-dire à l'âge de 9 ans), les projets en la matière étant d'ailleurs déjà bien avancés.

L'élève doit pouvoir « exposer » un certain nombre de situations en relation avec les objectifs fixés, mais la forme (orale , écrite, etc.) que pourrait revêtir cet « exposé » n'est pas explicitée. Il n'est pas précisé non plus ce qu'il faut entendre par « exposer » , à savoir, modéliser, mathématiser ou communiquer de manière générale : *l'élève doit avoir acquis, en mathématiques, les connaissances fondamentales qui lui permettront de décrire et de gérer* *des situations, mais aussi de résoudre des problèmes concrets dans son environnement immédiat.*

L'accent est mis sur la compréhension, les compétences et les méthodes conceptuelles, mais il est fait référence également à la capacité de « décrire » les propriétés d'objets géométriques. Selon une liste de compétences non exhaustive, l'élève « devrait » :

- avoir une connaissance élémentaire des nombres, nombres naturels et nombres simples sous forme de fractions et sous forme décimale ;
- comprendre et savoir utiliser l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, mais aussi être en mesure d'établir des séquences numériques et de déterminer des nombres inconnus en formule simple ;
- être capable de calculer en nombres naturels –par le calcul mental et par l'application de méthodes de calcul par écrit et l'utilisation de calculatrices ;
- avoir une connaissance élémentaire de l'espace, et savoir reconnaître et décrire quelques-unes des propriétés majeures des figures et formes géométriques ;
- être capable de comparer, d'évaluer et de mesurer la longueur, la superficie, le volume, les angles, les quantités et le temps, et savoir utiliser graphiques et cartes ;
- savoir décrypter et interpréter les données proposées sous forme de tableaux et de diagrammes, et utiliser quelques coordonnées élémentaires.

Le curriculum ne contient pas de référence explicite à la langue ou à la communication concernant les objectifs devant être atteints à l'issue de la 5e année.

5.5 Objectifs que l'élève doit avoir atteints à l'issue de la 9e année de scolarité (c'est-à-dire à l'âge de 16 ans)

L'élève doit savoir « exposer » des situations en relation avec les objectifs fixés, mais la forme (orale, écrite, etc.) que pourrait revêtir l'exposé en question n'est pas précisée : *l'élève doit avoir acquis en mathématiques les connaissances qui lui permettent de décrire et de gérer les situations et de résoudre les problèmes courants de la vie quotidienne (chez lui et à l'extérieur), et qui formeront la base requise pour la poursuite de ses études.*

Dans ce contexte, l'accent est mis sur la compréhension, les compétences et les méthodes conceptuelles , bien que soit mentionnée également la capacité de « décrire » les propriétés majeures d'objets géométriques. Selon une liste de compétences non exhaustive, l'élève devrait :

- avoir consolidé sa connaissance des nombres, y compris les nombres entiers et les nombres rationnels sous forme de fractions et sous forme décimale ;
- avoir de solides compétences et être à même d'effectuer des estimations et calculs de nombres naturels et décimaux, et de calculer des pourcentages et proportions, mentalement, à l'aide de méthodes de calcul par écrit, et d'aides techniques ;
- être capable d'utiliser des méthodes, des systèmes et instruments de mesure en vue de comparer, d'estimer et déterminer la longueur, la superficie, le volume, les angles, les quantités, les points et différentiels temporels ;
- savoir reproduire et décrire les propriétés majeures de quelques objets géométriques courants, mais aussi interpréter et utiliser graphiques et cartes ;

- pouvoir interpréter, rassembler, analyser et évaluer les données présentées dans des tableaux et diagrammes ;
- savoir appliquer le concept de probabilité à des situations aléatoires simples ;
- être en mesure d'interpréter et d'utiliser des formules simples, de résoudre des équations simples, ainsi que des graphiques pour la description de relations et événements réels.

A noter dans cette partie également l'absence de référence explicite à la langue et à la communication.

6. Autres questions à examiner dans le cadre du présent document

Vu la tradition herméneutique très présente en Suède, les programmes des communes et des établissements scolaires locaux procèdent d'une interprétation des principes directeurs définis au niveau national. Par conséquent, pour obtenir un tableau plus précis des pratiques dans ce domaine, il faudrait examiner plus en détail les programmes locaux des communes et des écoles et effectuer des études approfondies d'un échantillon d'établissements scolaires.

La rédaction du présent document nous a amenés à constater l'absence totale de critères d'évaluation dans les versions anglaises des programmes d'études suédois mis en ligne. Or la partie portant sur la capacité de l'élève à utiliser, développer et formuler ses connaissances mathématiques mentionne expressément l'importance de la communication orale : *L'un des aspects importants du savoir mathématique est la capacité d'exprimer sa pensée oralement et par écrit, au moyen du langage mathématique des symboles, mais aussi d'éléments concrets et notamment d'illustrations.*

On trouvera ci-après l'ensemble des critères d'évaluation.

<u>6.1 Evaluation en mathématiques</u>

6.1.1 Orientation du processus d'évaluation

Evaluer les capacités mathématiques de l'élève consiste à déterminer sa *capacité à utiliser, développer et formuler ses connaissances mathématiques*. Il s'agit notamment d'évaluer son aptitude à utiliser et développer son « savoir » mathématique en vue d'interpréter et de gérer divers types de tâches et de situations dans le cadre scolaire ou sociétal – par exemple la capacité à déceler des modèles et des relations, à proposer des solutions, à procéder à des estimations (brutes), à analyser et interpréter ses résultats et à estimer leur plausibilité. L'indépendance et la créativité sont d'importants aspects à prendre en compte dans le processus d'évaluation – de même que la clarté, la rigueur et la technique. Il importe que l'élève soit à même d'exprimer sa pensée oralement et par écrit, avec l'aide du langage mathématique des symboles ainsi que de matériels concrets et d'illustrations.

La capacité de suivre, de comprendre et d'analyser les raisonnements mathématiques. Cet aspect de l'évaluation de l'élève concerne sa réceptivité (*« ta del av »*) à toutes sortes d'informations, et sa capacité à les réutiliser aussi bien à l'oral qu'à l'écrit. Il s'agit, par exemple, de la capacité d'écouter, de suivre et d'analyser les explications et arguments d'autrui. L'attention se porte également sur la capacité de l'élève de se prononcer et d'émettre des jugements indépendants et critiques sur des descriptions de nature mathématique de problèmes rencontrés dans différents contextes, aussi bien à l'école que dans la société en général, et les solutions correspondantes.

La capacité de réfléchir sur l'importance des mathématiques dans nos cultures et sociétés. Il s'agit ici d'évaluer la prise de conscience et la perception par l'élève, de la valeur, mais aussi des limites des mathématiques en tant qu'outil et aide dans d'autres disciplines scolaires, dans la vie quotidienne, dans la société en général et dans la communication entre personnes. L'évaluation porte aussi sur la connaissance qu'a l'élève du rôle des mathématiques dans une perspective historique.

6.1.2 Mention « honorable » : critères d'obtention

L'élève utilise des concepts et méthodes mathématiques pour formuler et résoudre les problèmes. (« formuler » , tel qu'interprété dans le cadre de la détermination des objectifs à atteindre, peut être synonyme de « mathématiser» ou « modéliser»).

- L'élève suit et comprend le raisonnement mathématique
- L'élève effectue des interprétations mathématiques d'événements, situations et actes de la vie quotidienne et les expose en s'appuyant sur un raisonnement oralement ou par écrit
- L'élève utilise les termes, illustrations et conventions mathématiques en veillant à ce que les pensées exprimées puissent être suivies, comprises et analysées
- L'élève résout les problèmes de manière cohérente (*« säkerhet »*) et applique diverses méthodes et procédures
- L'élève établit une distinction entre suppositions et hypothèses et faits connus ou vérifiables
- Enfin, à l'aide de quelques exemples, l'élève illustre l'évolution et l'utilisation des mathématiques au fil de l'histoire et leur importance aujourd'hui.

6.1.3 « Mention spéciale » : critères d'obtention

- L'élève sait formuler et résoudre différents types de problèmes, et comparer et évaluer les avantages et inconvénients de différentes méthodes .
- L'élève est sûr de soi (« säkerhet ») dans les calculs et la résolution des problèmes ; il sait choisir et adapter les méthodes et instruments de calcul au problème à résoudre.
- L'élève sait exposer les problèmes et appliquer les stratégies générales d'organisation et de mise en œuvre des solutions ; il sait faire des analyses et des rapports structurés, en utilisant le langage mathématique adapté.
- L'élève sait écouter l'argumentation de ses pairs et y réagir en présentant ses propres arguments mathématiques
- L'élève sait réfléchir à l'importance des mathématiques dans la vie culturelle et sociale.

7. Tâches

Le système national d'évaluation offre des exemples de tâches mathématiques particulièrement adaptées à la communication. En Suède, les examens nationaux de mathématiques portent sur un large éventail de sujets au programme ; ils comportent relativement peu de « pièges » et correspondent très largement au cursus (voir exemples à l'Annexe 1).

8. Conclusions

D'après *Skolverket* (2005), les partis politiques suédois ont sur les examens nationaux et le système de notation des avis divergents. Les partis conservateurs sont généralement favorables au principe de la notation dès le plus jeune âge et d'un barème de notation plus élaboré (comportant davantage de paliers de notation) et préconisent plus d'examens nationaux. Les partis de gauche, au contraire, ne veulent ni plus de notes ni plus d'examens nationaux. Il y a d'un côté ceux qui sont pour l'évaluation *de* l'apprentissage (des connaissances acquises) et de l'autre, ceux pour qui l'évaluation doit être *au service de* l'apprentissage. Avec la mise en place du nouveau gouvernement, les prévisions de *Skolverket* (2005) tendent à se vérifier, dans la mesure où l'on s'oriente vers un renforcement de l'évaluation systématique des connaissances.

Cette analyse succincte du curriculum semble indiquer qu'il serait parfaitement possible de consolider le rôle de la langue d'enseignement, pour ce qui concerne les mathématiques, dans la période de scolarité obligatoire. Ceci pourrait avoir des répercussions importantes sur le niveau de performance des élèves ; et, si cette consolidation intervenait effectivement, elle aurait des conséquences notables sur la conception des programmes, la formation initiale et continue des enseignants et sur les priorités des décideurs en ce qui concerne l'octroi de ressources, et, en définitive sur ce que l'on pourrait appeler le « rapport qualité/prix ». La question mérite à tout le moins d'être dûment approfondie.

Références

Skolverket (2007) KUSINFO 2006/07.

Skolverket (2005) : Evaluation et notation nationales dans le système scolaire suédois.

(Disponible en anglais seulement)

APPENDIX 1

Tasks intended for oral and written communication in mathematics

Swedish examples of mathematical tasks particularly suited for communication can be found in the national assessment system. Swedish national tests in mathematics are designed to cover a broad spectrum of the syllabus. They are fairly low-stakes and to a high degree aligned with the curriculum.

Oral tasks

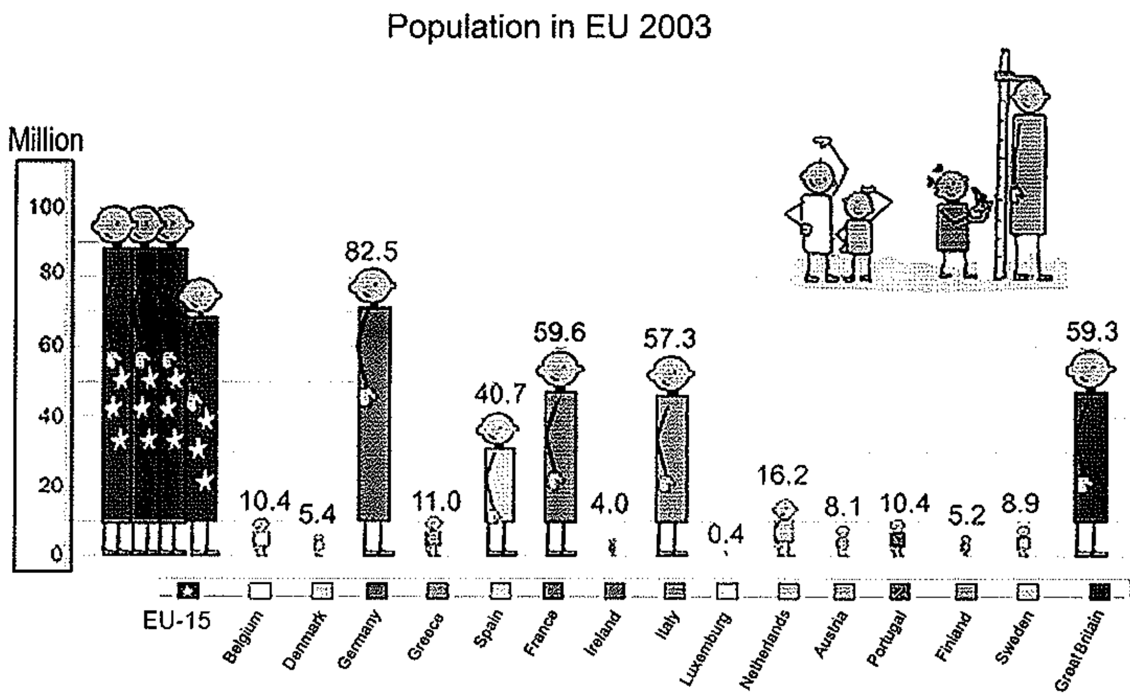
Two tasks or models from the national assessment system

Oral tasks in mathematics are exemplified by two kinds of models used in the Swedish national assessment system.

5, 6, 8	Calculating proportions (fractions or percent).
7, 9	Understanding what constitutes the whole, when making comparisons.
7, 10, 11, 12, c, d	Understanding the relationship population – population density – area.
a, b, e	Careful scrutiny of diagrams.
b, e	Understanding length scale, area scale.

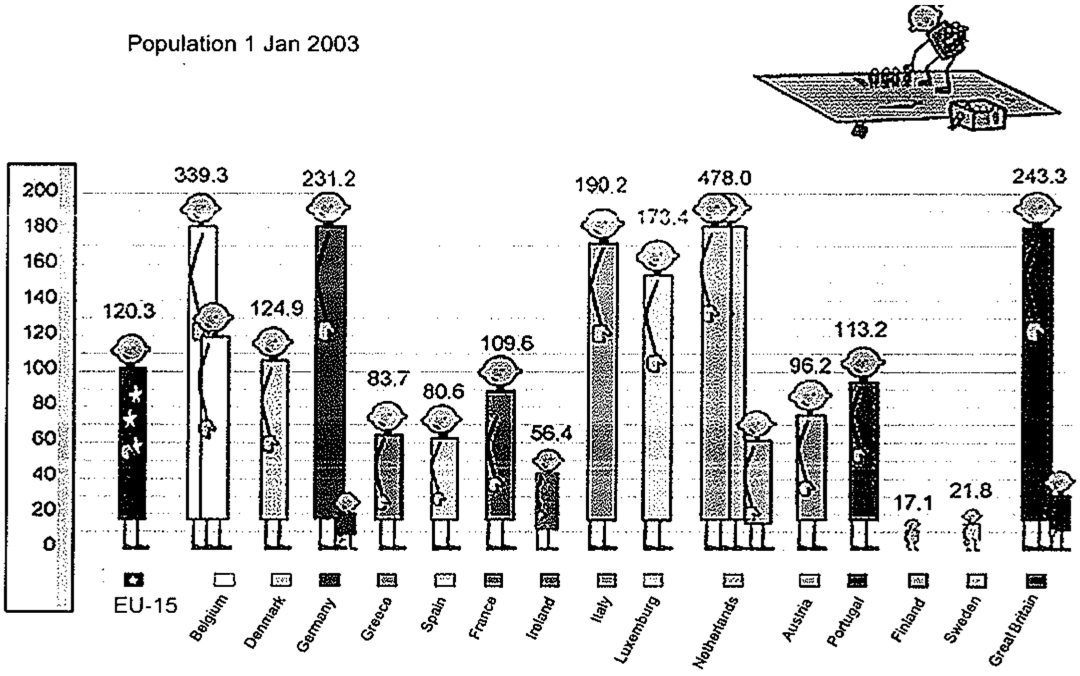
In addition, the task is supplemented by elaborate assessment criteria intended for summative assessment but also well suited as a foundation for formative assessment. The assessment is based on three aspects. The first aspect is understanding, and addresses to what extent the students show that they have understood the question, the concepts and relationships between them. The second aspect is language and assesses the clarity of the student's explanations, and how well they use mathematical language. The third aspect focuses on degree of participation, i.e. to what extent the students participate in the discussion, can argue for their ideas and respond to the explanation of other students.

Version B – EU's population (diagrams)



Source: Eurostat

Population 1 Jan 2003



Population density: inhabitants per square kilometre, 1 Jan 2003

Source: Eurostat

Version B – EU's population (statements)

The diagram shows that

1. the population of Spain is about 80 million.
2. Finland is the country with the lowest population density in EU.
3. EU has about 380 million inhabitants.
4. the country with the most inhabitants is also the most densely populated.
5. a little more than one tenth of the population of EU lives in Spain.
6. the three countries with the greatest number of inhabitants have, together, about 50 % of EU's population.
7. in Great Britain there is about twice as much area per person as there is in the Netherlands.
8. 5 % of EU's population lives in Sweden.
9. Portugal has 50 % more inhabitants than Finland.
10. in Sweden we have about 6 times more area per person than the average in EU.
11. the area of Spain is greater than that of Greece.
12. the area of France is almost double that of Italy.

The second example describes a model for working with oral competencies in mathematics rather than a specific mathematical task. This model has been developed as part of the assessment package for upper secondary school. It differs from the model presented above mainly through its exclusive focus on the oral competence. The model from comprehensive school presented above was partly about the oral proficiency of the students and partly about using oral presentations as a tool to learn about students understanding of the mathematical content. In the second Swedish example, each student is given a mathematical task of a kind that the individual student is most likely to solve with some understanding. The idea is that students should be able to solve the problem because the oral part is about how students can describe and reflect on their solution, not on revealing mathematical understanding in general. After working individually with a task, 4-5 students meet with the teacher and are given the opportunity to talk about what they have done. The other students in the group are encouraged to ask questions and engage in discussions. The teacher can also ask questions, but it is stressed that the idea of the group is to create a communicative environment where students primarily see their peers as the audience.

A number of mathematical tasks are suggested to the teacher, but these are not unique or highly designed for the purpose of oral communication. Teachers can use these tasks or find others that seem to fit what their students have been working with.

Comparison of length

The Swedish National Centre for Mathematics Education (NCM) at Göteborg University coordinates, supports, develops and implements the contributions which promote Swedish mathematics education from pre-school to university college. NCM has a website with lots of materials for teachers, including a resource based on the goals to strive for in the mathematics syllabus of the Swedish comprehensive school. The resource is constructed as a matrix with the goals to aim for as columns and the content-oriented goals to achieve in the rows. When you click on a cell in the matrix you will find relevant articles and also tasks and exercises relating to the particular combination of goals indicated by the position in the matrix.

One of the goals to aim for explicitly refers to communication, stating that students should develop their ability to understand, carry out and use logical reasoning, draw conclusions and generalise, as well as orally and in writing explain and provide the arguments for their thinking. The NCM material in this column of the matrix does not supply much that focuses on the communicative aspects of this goal. There are a couple of articles, and one or two tasks. One example is shown here.

In this task, students work in groups, and each group gathers around a table where the teacher has put 5-7 cards with different lengths printed. In collaboration, the students should order their cards, from the one with the shortest distance printed to the one with the longest. The students in the group must all agree on the order. When the groups are happy with their results, they change table and start working with another ser of cards. At the new table the group reflects on whether the presented order of cards is correct or if it should be changed. Suggestions for changes are noted on a piece of paper at this station. The groups continue to the next table and finally end up at the table where they started. In the final part of the task, the group read the suggestions from the other groups and take them into consideration.

4B Jämföra längd

... *Utvecklar sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande.*

... *Olika metoder, måttsystem och mätinstrument för att jämföra, uppskatta och bestämma storleken av viktiga storheter.*

Exempel på en gruppuppsättning kort:

7 dm	2 m
35 cm	100 mm
1 dm 5 cm	2 mm

Nämnaren
Nationellt Centrum för Matematikutbildning
namnaren.ncm.gu.se

Written communication

Two tasks given in national tests in the final year of comprehensive school:

Lisa competes in archery. Each arrow can score at least 0 points and at most 10 points. At a competition Lisa shot 5 arrows. The mean score was 8 points and the median was 10 points. How might she have shot? Explain your choice and discuss various possibilities.

La langue dans le programme de mathématiques en Roumanie

Florence Mihaela Singer

1. Mathématiques

1.1. Organisation de l'enseignement des mathématiques

En Roumanie, les mathématiques sont enseignées en tant que discipline distincte dès la première année du cursus scolaire. L'emploi du temps hebdomadaire prévoit trois ou quatre cours de mathématiques de la 1ère à la 5e année, quatre cours de la 6e à la 8e année et deux à quatre cours, selon la filière choisie par l'élève, de la 9e à la 12e année. Les cours durent de 45 à 50 minutes. Par ailleurs, durant la période de scolarité obligatoire, l'élève inscrit en filière « Mathématiques » ou « Sciences » peut opter pour un cours hebdomadaire supplémentaire. Le nombre de cours optionnels est plus important dans le second cycle de l'enseignement secondaire.

Les programmes prévoient de 102 à 136 cours de mathématiques par an de la 1ère à la 5e année, 136 cours par an de la 6e à la 8e année, et de 68 à 36 cours par an de la 9e à la 12e année. Les élèves sont tenus de préparer des devoirs de mathématiques chez eux, mais la question ne fait pas l'objet d'une réglementation officielle. Les devoirs sont toujours à faire par écrit ; la quantité est fonction de l'enseignant.

1.2. Méthodes d'enseignement

La teneur de l'enseignement est définie à l'échelon national. Les programmes sont établis pour trois niveaux : préscolaire, primaire, secondaire.

Chaque enseignant a la faculté d'élaborer ses propres méthodes pédagogiques. Le curriculum général n'impose aucune méthode en particulier, mais propose des *exemples d'activités d'apprentissage*, pour les divers objectifs de référence. Les activités pratiques et la résolution de problèmes occupent une place relativement importante. Certains objectifs impliquent des activités à mener en groupe, que les enseignants ont encore tendance à considérer comme facultatives. Peu d'enseignants connaissent et pratiquent la « gestion de classe élaborée » (utilisation d'un certain type d'organisation des cours par rapport à des objectifs précis).

L'enseignement fait appel à différents instruments et ressources : objets, formes, dessins, ordinateurs, mais l'usage de calculatrices est interdit. Les activités pratiques jouent un rôle très important dans l'enseignement primaire où les élèvent utilisent divers objets (bâtonnets ou billes) pour apprendre à calculer. Par la suite les enseignants privilégieront les instruments de mesure que les élèves manieront toute l'année. Des modèles de formes géométriques les aident à visualiser des concepts abstraits. L'usage systématique de logiciels informatiques est relativement peu répandu.

1.3. Manuels scolaires

Depuis 1996, les manuels scolaires sont choisis sur une liste de manuscrits dans le cadre d'un concours national, ce qui permet d'évaluer le contenu de chaque proposition en fonction de plusieurs critères et d'un devis. Les manuels retenus sont inscrits sur une liste homologuée par le ministère de l'Education dans laquelle il appartiendra aux enseignants de choisir celui qui sera le manuel officiel des élèves. Du début à la fin de la scolarité obligatoire, les manuels sont gratuits – c'est-à-dire payés par l'Etat. Les manuels de mathématiques sont habituellement utilisés en classe comme recueil d'exercices. Les enseignants qui le souhaitent peuvent se procurer des « guides pédagogiques » ; ceux-ci ne sont pas obligatoires.

1.4. Evaluation en mathématiques

L'évaluation consiste en des tests, des exercices classiques (oraux et écrits), un travail de projet (rarement) ou une autoévaluation (rarement). Elle s'effectue sur la base des objectifs définis pour chaque niveau d'âge dans le curriculum, lequel fixe également les normes à atteindre à l'issue de l'enseignement primaire et du premier cycle du secondaire.

Des équipes d'experts en matière de curriculum et d'évaluation ont élaboré des « grilles de niveau » qui présentent de façon détaillée les objectifs à atteindre à trois niveaux. Mais, le plus souvent, les enseignants ne sont ni suffisamment versés dans l'utilisation de ces niveaux ni suffisamment bien au fait des connaissances de base que l'élève doit avoir acquises à l'issue de chaque année scolaire.

Le premier examen officiel comportant une épreuve de mathématiques se passe à l'âge de 15 ans, au terme de la 8e année de scolarité. C'est un examen certifiant que l'élève a achevé sa scolarité obligatoire et lui donnant accès au second cycle de l'enseignement secondaire. Des évaluations nationales sont organisées périodiquement pour un échantillon d'élèves représentatif, à la fin de la 4e année.

2. Aspects « linguistiques » du programme de mathématiques

En Roumanie, le *Curriculum national* se compose des éléments suivants :

- *Le Curriculum national de l'enseignement obligatoire – Cadre de référence* (texte réglementaire qui garantit la cohérence des composantes du cursus scolaire, c'est-à-dire des différents processus et éléments) ;
- *Le Curriculum-Cadre des années I à XII/XIII* – texte définissant les domaines et les matières du programme et le temps à y consacrer ;
- *Les Programmes par matière,* qui définissent ou proposent *:*

a) de la 1ère à la 8ème année : les objectifs et niveaux à atteindre (en termes de résultats), des objectifs de référence, des exemples d'activités d'apprentissage, le contenu général et les normes de performance ;

b) de la 9ème à la 12ème année : les compétences générales, les compétences spécifiques, les contenus, valeurs et conceptions s'y rapportant, une proposition de méthodologie, ce, pour chaque matière figurant dans le « Curriculum-Cadre » ;

- *Des guides pédagogiques* qui indiquent un mode opératoire.

Le corpus du *Curriculum national* a été publié et distribué dans l'ensemble du système éducatif de 1997 à 2001. Il comprend plus de 50 volumes de texte, soit plus de 6000 pages. Le programme de mathématiques pour l'enseignement obligatoire a connu deux grandes refontes en 1995 et 1999. Dans les deux cas les modifications apportées au programme officiel dans les textes n'ont pas influencé la pratique enseignante de façon significative. La dernière refonte du programme officiel de mathématiques à l'école primaire remonte à 2003. Elle n'a pas porté sur la philosophie du programme, mais sur la structure du contenu.

Le *Curriculum national* s'articule autour de sept grands *domaines*, déterminés selon des critères épistémologiques et psychopédagogiques et proposant chacun une vision multidisciplinaire et/ou interdisciplinaire. Ces domaines sont les suivants : Langue et Communication ; Mathématiques et Sciences naturelles ; Homme et Société ; Arts ; Education physique et Sport ; Technologies ; Conseil et Orientation. Les domaines sont les mêmes pour la période de scolarité obligatoire et le second cycle du secondaire, mais leur place et leur importance varient au fil de la scolarité.

Les textes énoncent pour l'enseignement obligatoire les nouvelles orientations ci-après :

- placer l'apprentissage – en tant que processus – au cœur des approches pédagogiques ;
- orienter l'apprentissage vers l'acquisition de compétences et de comportements, notamment en développant la capacité à résoudre les problèmes ;
- veiller à la souplesse de l'offre d'apprentissages ;
- adapter l'apprentissage à la vie quotidienne, ainsi qu'aux besoins, aux intérêts et aux aptitudes des élèves ;
- instaurer de nouveaux modes de sélection et d'organisation des objectifs et des programmes scolaires, en privilégiant « la qualité plutôt que la quantité » ;
- pour motiver les élèves, personnaliser les parcours scolaires en les centrant sur l'innovation et l'épanouissement personnel ;
- associer l'ensemble des acteurs éducatifs à la conception, au suivi et à l'évaluation du curriculum.

Examiner de plus près le domaine « Mathématiques et Sciences naturelles » au sein du Curriculum national permet de mieux comprendre l'esprit de ce dernier. Apprendre les mathématiques dans le cadre de l'enseignement obligatoire suppose de les considérer d'une part comme une activité de résolution de problèmes fondée sur un ensemble de connaissances et de méthodes à explorer progressivement, et, d'autre part comme une matière dynamique, étroitement liée à la société dans un faisceau de rapports pertinents avec la vie quotidienne, avec les sciences naturelles, les technologies et les sciences sociales (cf. Crisan et Singer, 1999). Cette conception des mathématiques exige des enseignants de revoir leur approche du cours et de l'activité en classe. Plus concrètement, les changements à y apporter sont indiqués ci-après dans le Tableau 1.

Tableau 1: Evolution de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques

En recul :	En progrès:
La mémorisation de règles et le calcul mental	Les activités de résolution des problèmes –par la méthode des essais et erreurs, la participation active en situation concrète, la recherche de solutions au-delà du savoir scolaire
La résolution de problèmes/exercices à réponse unique	La formulation de questions, l'analyse des différentes étapes et la motivation des choix opérés dans le processus de résolution des problèmes
Les mathématiques dans le cahier (ou au tableau)	Recours à divers types de manipulations pour faciliter l'apprentissage
L'enseignant en tant que simple pourvoyeur d'informations, que l'élève absorbe passivement, dans un travail solitaire	L'enseignant dans le rôle de modérateur, incite les élèves à travailler en groupe
L'évaluation dans le but d'étiqueter l'élève	L'évaluation comme partie intégrante de l'apprentissage et moyen de stimuler les activités de classe

Dans l'enseignement obligatoire, les objectifs-cadres sont les suivants :

1. Connaissance et utilisation de concepts mathématiques ;
2. Développement des capacités d'exploration, d'investigation et de résolution de problèmes ;
3. Utilisation du langage mathématique pour communiquer ;
4. Susciter l'intérêt pour les mathématiques et inciter l'élève à les appliquer à divers contextes.

La nouvelle conception de l'éducation que promeut le « Curriculum national » met davantage l'accent sur la langue d'enseignement. L'un des quatre objectifs-cadres de l'apprentissage des mathématiques dans l'enseignement obligatoire est ainsi expressément consacré à la communication.

Les aspects spécifiques mettant en jeu la terminologie mathématique–argumentation, compréhension de texte, textualité, identification des types de textes, du genre et du contexte intrinsèquement liés au processus de résolution de problème lexical– se retrouvent de manière indirecte dans les normes de performance établies pour l'enseignement primaire et secondaire.

Les tableaux 3 et 4 indiquent les normes minima.

Tableau 2: Programme de mathématiques. Normes de performances pour l'enseignement primaire

	Objectifs-cadres	NORMES DE PERFORMANCE (Niveau minimum)
1	Connaissance et utilisation de concepts mathématiques spécifiques, de la terminologie et des méthodes de calcul propres aux mathématiques	S1. Savoir écrire et lire les nombres jusqu'à 1 000 000 S2. Utiliser correctement la terminologie mathématique S3. Savoir effectuer des additions et des soustractions avec des nombres naturels jusqu'à 1 000 000 S4. Savoir effectuer des multiplications et des divisions avec des nombres naturels jusqu' à 1 000 000 S5. Savoir utiliser des fractions, dans des exercices simples d'addition et de soustraction avec des dénominateurs identiques
2	Développement des capacités d'exploration/d'investiga-tion et de résolution de problèmes	S6. Reconnaître, représenter et classer des formes 2D et 3D S7. Formuler et résoudre des problèmes exigeant trois opérations au plus S8. Utiliser le raisonnement arithmétique en situation de résolution de problème S9. Utiliser des modes simples d'organisation et de classification de données S10. Reconnaître et élaborer des modèles de séquences S11. Effectuer des estimations et approximations dans des situations concrètes S12. Utiliser des unités de mesure non conventionnelles dans divers contextes S13. Utiliser des unités de mesure conventionnelles de temps, masse, longueur et volume
3	Développer la capacité de communiquer au moyen du langage mathématique	S14. Formuler avec concision et clarté, oralement et par écrit, les stratégies de calcul et les résultats d'exercices et problèmes

Tableau 3: Programme de mathématiques. Normes de performance pour la fin de l'enseignement obligatoire

	Objectifs-cadres	NORMES DE PERFORMANCE (Niveau minimum)
1.	Connaissance et compréhension des concepts, de la terminologie et des méthodes de calcul propres aux mathématiques	S.1 Savoir écrire, lire et comparer des nombres réels, et les représenter sous forme linéaire S.2 Savoir effectuer des opérations portant sur des nombres réels (éventuellement symbolisés par des lettres) S.3 Savoir utiliser estimations et approximations de nombres et mesures (longueurs, angles, surfaces et volumes), pour évaluer la validité des résultats S.4 Savoir utiliser des notions de logique et théorie des ensembles, ainsi que relations, fonctions et séquences dans la résolution de problèmes S.5 Résoudre des équations et inéquations et effectuer des calculs algébriques en utilisant algorithmes, formules et méthodes spécifiques S.6 Etablir et utiliser les propriétés qualitatives et métriques des formes géométriques 2D et 3D, dans des problèmes impliquant démonstrations et calculs S.7 Savoir utiliser les positions relatives de formes géométriques et d'éléments de transformations géométriques S.8 Enregistrer, traiter et présenter des données en utilisant des notions de statistiques et probabilités
2.	Développer les capacités d'exploration, de recherche et de résolution des problèmes	S.9 Identifier un problème et organiser efficacement sa résolution S.10 Utiliser diverses représentations et méthodes pour préciser et justifier des postulats (preuves) S.11 Construire des généralisations et vérifier leur validité
3.	Développer la capacité de communication au moyen des codes mathématiques	S.12 Comprendre la signification globale d'informations mathématiques émanant de différentes sources S.13 Exposer oralement ou par écrit ses propres tentatives de résoudre correctement un problème S.14 Participer à des activités mathématiques en qualité de membre d'un groupe

Pour avoir une idée plus précise du contenu du programme et de ses relations avec la langue, on pourra se reporter aux tableaux figurant dans l'annexe qui présentent sous une forme synthétique les objectifs-références de chacun des quatre objectifs-cadres de la 1ère à la 4e année. De la 5e à la 8e année, le tableau présente les objectifs-références concernant expressément la communication. On verra mieux ainsi la progression voulue dans le développement des compétences de l'élève en mathématiques durant la période de scolarité obligatoire.

3. Conclusions

En ce qui concerne la langue dans le programme de mathématiques on pourra formuler un certain nombre de conclusions en se fondant sur la liste Vollmer-Ongstad (2007). En Roumanie, le programme de mathématiques de l'enseignement obligatoire met expressément l'accent sur la langue dont il prend en compte les différentes facettes.

La langue comme mode de communication immédiate, comme moyen d'échanger des idées, comme mode d'interaction avec autrui, pour construire du sens ensemble – à deux, en petits groupes ou par classe entière, pour négocier du sens. L'un des quatre objectifs-cadres concerne spécifiquement la « communication par le langage mathématique ». Comme pour les autres objectifs-cadres, les objectifs références de celui-ci sont organisés de manière progressive de la 1ère à la dernière année de l'enseignement obligatoire.

La langue comme instrument d'appréhension et de compréhension du texte. Certains objectifs-références mettent particulièrement l'accent sur la lecture et la rédaction de textes mathématiques, ainsi que sur le décodage de ces textes à l'aide d'opérateurs logiques et de quantificateurs.

La langue en tant qu'élément du contenu de la discipline (en particulier significations/termes et expressions basiques). L'objectif-cadre intitulé « Connaissance et utilisation des concepts mathématiques » met l'accent sur la langue en tant qu'illustration de la structure d'un sujet ou thème donné dans les activités d'apprentissage axées sur la terminologie.

La langue en tant que pratique discursive et concrétisation de fonctions discursives fondamentales (telles que la dénomination, la définition, la description, l'explication, le soutien, le compte rendu, la formulation d'hypothèses, l'évaluation, etc.) est mise en avant dans le cadre de divers exemples d'activités d'apprentissage liées au programme des différentes années.

L'objectif-cadre intitulé « Développement des compétences d'exploration, d'investigation et de résolution des problèmes » porte sur *l'aspect créatif du langage (le rhème/nouvel élément du rhème-thème ou d'une dynamique considérée comme inédite), le langage en tant que moyen de création, de développement et d'expression de nouveaux concepts et conceptions*.

L'objectif-cadre intitulé « Susciter l'intérêt pour les mathématiques et inciter l'élève à les appliquer à divers contextes » met l'accent sur *la langue en tant qu'instrument de réflexion (critique) sur la matière et le processus d'apprentissage*. Les objectifs-références axés sur la communication et le développement de conceptions sont essentiels à la métacognition et sont au cœur de l'éducation du XXIème siècle.

Références

Cerkez, M., Singer, F.M., Sarivan, L. (coordinateurs de l'étude) (1999): *Curriculum national du premier cycle de l'enseignement secondaire. Programmes d'étude,* Volumes 1 à 10 (en langue roumaine), Bucarest, Editions Cicero.

Crisan, Al., Georgescu, D., Singer, F.M. (coordinateurs de l'étude) (1998): *Curriculum national de l'enseignement obligatoire. Programme-cadre* (en langue roumaine), Bucarest, Editions Corint.

Singer, F. M. (coordinateur de l'étude) (1999): *Le nouveau Curriculum national : Synthèse.* Bucarest, Editions Prognosis.

Singer, F. M., (2001): Structurer l'information – une nouvelle manière de voir le contenu de l'apprentissage, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik/IRME, MATHDI*, 6, pp. 204-217.

Singer, F. M. (coordinateur de l'étude) (2001): *Guide méthodologique du Groupe de disciplines scolaires Mathématiques/ Sciences naturelles*. De la 9e à la 12e année. Bucarest: Editions Aramis.

Singer, F. M., Voica, C. *Challenging the future: mathematics education in Romania between ideals and reality (Un défi pour l'avenir: l'enseignement des mathématiques en Roumanie entre rêve et réalité)*, Cub, ICME-10, 2004

Vlasceanu, L. (coordinateur de l'étude.) (2003): *L'école à la croisée des chemins – Changement et continuité du Curriculum de l'enseignement obligatoire* (en langue roumaine, avec un résumé en anglais), Bucarest: Editions Polirom.

Vollmer, H.; Ongstad, S. (2007): Some notes on crucial concepts/ Report from the LAC Mathematics Education Group (LAC/MEG) (Notes sur des concepts essentiels / Rapport du Groupe Enseignement des mathématiques sur la langue d'enseignement). Non daté.

Tableau A: Le système éducatif roumain actuel

Age	Classes	ISCED	Niveau d'enseignement			Niveau de qualification	Types d'école
> 19		6	Post-université		Enseignement supérieur	5	
		5	Université			4	
		4	Post-lycée		Enseignement post-secondaire	3	
18	XIII	3		Lycée – cycle supérieur	Enseignement secondaire supérieur	3	Post- obligatoire
17	XII		Lycée – cycle supérieur				
16	XI			Année complémentaire		2	
15	X	2	Lycée – cycle inférieur	Ecole d'arts et de métiers	Enseignement secondaire inférieur	1	Obligatoire
14	IX						
13	VIII		Collège				
12	VII						
11	VI	1					
10	V						
9	IV		Ecole primaire		Enseignement primaire		
8	III						
7	II						
6	I						
5		0	Maternelle		Education préscolaire		
4							
3							

Les enseignants et l'organisation des cours aux niveaux primaire et secondaire

Au niveau primaire l'instituteur/ institutrice enseigne toutes les disciplines scolaires à l'exception de la langue étrangère et de la religion (ces dernières étant enseignées par un professeur spécialiste). L'instituteur/ institutrice donne normalement 18 heures de cours par semaines. A part ces heures de cours, il/ elle assure d'autres activités au niveau de l'école mais il n'y a pas de spécification quant au temps dévoué. L'instituteur/ institutrice travaille avec une seule classe d'élèves tous le long de l'enseignement primaire. Il y a 25 élèves environ dans une classe.

Au niveau secondaire, l'enseignement des disciplines scolaires est dispensé par des spécialistes. L'enseignant spécialisé donne 16-18 heures de cours par semaine.

Formation des enseignants

Avant 1999, les instituteurs/ institutrices étaient formés dans les écoles normales qui dispensaient un enseignement mathématiques similaire à celui des lycées de profile humaniste. A partir de 1999 la formation des instituteurs/ institutrices se déroule au niveau de l'enseignement supérieur. Cependant la formation mathématique dans cette nouvelle formule est similaire à celle qui avait été dispensée dans les écoles normales.

Les enseignants de mathématique pour l'école secondaire ont toujours eu une formation académique de 4-5 ans. A partir de 2005, à la suite de l'implémentation du Processus de Bologne, les futurs enseignants de mathématique reçoivent une formation académique de 3 ans à laquelle s'ajoute le module psycho-pédagogique.

La formation continue des enseignants est déroulée au niveau des université par les départements de formation ainsi que par des programmes dispensés par d'autres institutions de formation (ONG-s ou autres).

Recrutement

Les départements recrutent les enseignants pour chaque école par l'intermédiaire d'une compétition. Le chef d'établissement n'est pas impliqué dans ce processus.

L'évaluation des enseignants

Les inspecteurs évaluent les enseignants. Le chef d'établissement donne une évaluation formelle à la fin de chaque année scolaire.

B. Progression des objectifs dans l'enseignement des mathématiques en Roumanie

Les objectifs de cadrage pour l'enseignement obligatoire des mathématiques sont les suivants :

1. Connaissance et utilisation des concepts mathématiques.
2. Développement des capacités d'exploration, d'investigation et de résolution de problèmes.
3. Utilisation du langage mathématique pour communiquer.
4. Développement de l'intérêt et de la motivation pour étudier des mathématiques et les appliquer dans différents contextes.

Remarque : dans ce qui suit figurent *en italique précédé par* * les objectifs obligatoires uniquement pour le 'programme étendu' (il s'agit d'une version du curriculum comprenant un ensemble d'objectifs et de contenus supplémentaires pour des classes plus avancées, choisie par décision au niveau de l'école)

Les tableaux B-E présentent la progression des objectifs de référence pour mathématiques au niveau primaire (de la 1ère à la 4e année)

Tableau B. La progression des objectifs de référence pour le premier objectif de cadrage : *Connaissance et utilisation des concepts mathématiques*

Objectifs de référence pour la 1ère année	Objectifs de référence pour la 2ème année	Objectifs de référence pour la 3ème année	Objectifs de référence pour la 4ème année
En fin de lère année les élèves vont être capables de :	*En fin de2ème année les élèves vont être capables de :*	*En fin de 3ème année les élèves vont être capables de :*	*En fin de 4ème année les élèves vont être capables de :*
1.1. comprendre le système de numération écrite de position pour les nombres de 2 chiffres à l'aide d'objets	1.1. comprendre le système de numération écrite de position pour les nombres de 3 chiffres à l'aide d'objets	1.1. connaître et utiliser la signification de la position des chiffres dans la numération écrite des nombres inférieurs à 1 000	1.1. connaître et utiliser la signification de la position des chiffres dans la numération écrite des nombres inférieurs jusqu'à l'ordre des milliards y-inclus
1.2. écrire, lire et comparer des entiers positifs entre 1 et 100 ; * *utiliser les symboles '<' , '>' , et '=' pour comparer des nombres*	1.2. écrire et lire des entiers positifs entre 1 et 1 000 et comparer des entiers positifs inférieur à 1 000, en utilisant les symboles '<' , '>' , et '='	1.2. écrire, lire, comparer et ranger des entiers positifs jusqu'à 1 000 000	1.2. écrire, lire, comparer et ranger des entiers positifs ;
1.3. additionner et soustraire : - * *des nombres entre 0 et 20 avec retenue* - des nombres entre 0 et 30 sans retenue - * *des nombres entre 0 et 100 sans retenue*	1.3. additionner et soustraire : - des nombres entre 0 et 100 sans et avec retenue - * *des nombres entre 0 et 1 000* 1.4. effectuer des multiplications avec des nombres entre 0 et 100, en utilisant l'addition réitérée ou les tables de multiplication jusqu'à 50 ; les divisions avec des nombres plus petits que 50 par soustractions réitérées ou essais multiplicatifs ; * *multiplication et division de nombres entre 0 et 100*	1.3. additionner et soustraire des nombres jusqu'à 1 000 1.4. exécuter des multiplications avec des nombres entre 0 et 1 000, en utilisant les tables de multiplication ou les propriétés de la multiplication 1.5. diviser un nombre plus petit que 100 par un nombre d'un chiffre ; * *diviser un nombre de trois chiffres par un nombre d'un chiffre* 1.6. estimer le résultat d'un exercice à une opération, en donnant l'ordre de grandeur, pour contrôler d'éventuelles erreurs	1.3. faire usage de fractions pour exprimer des quantités plus petites que 1 1.4. comprendre la signification des opérations arithmétiques et l'utilisation des algorithmes de l'addition, la soustraction, la multiplication et la division euclidienne des entiers positifs 1.5. comprendre la signification de l'addition et de la soustraction des fractions, faire de telles opérations 1.6. estimer le résultat d'un exercice à une opération, en donnant l'ordre de grandeur, pour contrôler d'éventuelles erreurs
1.4. reconnaître des formes en 2 et 3 dimensions, trier et classer des objets en fonction de leur forme 1.5. identifier des positions relatives d'objets dans l'espace ; placer des objets dans des positions variées	1.5. reconnaître des formes en 2 et 3 dimensions, trier et classer des objets en fonction de leur forme 1.6. identifier des positions relatives d'objets dans l'espace ; placer des objets dans des positions variées	1.7. trier et classer des objets en fonction de leur forme ; reconnaître une symétrie simple dans des dessins	1.7. reconnaître des objets en dimensions 2 et 3, identifier et décrire des propriétés simples de formes planes

1.6. mesurer et comparer des longueurs, des contenances et des poids d'objets, en utilisant des unités non standard manipulables par des enfants ; lire l'heure sur une pendule.	1.7. mesurer et comparer des longueurs, des contenances et des poids d'objets, en utilisant des unités non standard adéquates et aussi les unités du système métrique : mètre, centimètre, litre 1.8. utiliser des unités de temps et de monnaie.	1.8. connaître les unités standard pour les longueurs, les volumes, les poids, le temps et la monnaie ; réaliser des conversions entre ces unités, leurs multiples et leurs sous-multiples.	1.8. connaître les unités standard pour les longueurs, les volumes, les poids, le temps et la monnaie ; réaliser des conversions entre multiples et sous-multiples de la même unité.

Tableau C: La progression des objectifs de référence pour le deuxième objectif de cadrage :

Développement des capacités d'exploration, d'investigation et de résolution des problèmes

Objectifs de référence pour la 1ère année	Objectifs de référence pour la 2ème année	Objectifs de référence pour la 3ème année	Objectifs de référence pour la 4ème année
En fin de 1ère année les élèves vont être capables de :	*En fin de 2ème année les élèves vont être capables de :*	*En fin de 3ème année les élèves vont être capables de :*	*En fin de 4ème année les élèves vont être capables de :*
2.1. explorer des écritures diverses des nombres inférieurs à 20 comme somme et différence ; * *explorer des écritures diverses des nombres inférieurs à 100 comme somme et différence* 2.3. estimer le nombre d'objets d'une collection et vérifier par le dénombrement	2.1. explorer des écritures diverses des nombres inférieurs à 100 2.2. estimer le résultat d'une opération en vue de limiter les erreurs avec la calculatrice ;	2.1. explorer des décompositions diverses des nombres inférieurs à 1 000, utilisant les quatre opérations 2.2. faire la division euclidienne par un nombre à un chiffre et la relier à l'égalité : dividende = diviseur × quotient + reste, avec le reste inférieur strictement au diviseur, en soustractions réitérées ou multiplications	2.1. explorer des décompositions diverses des nombres inférieurs à 1 000, utilisant les quatre opérations et leur combinaison 2.2. estimer la valeur de vérité d'une assertion et connaître le sens de l'implication de « si…alors » dans des exemples simples
2.2. repérer la correspondance entre les éléments de deux collections d'objets, des dessins ou des écritures d'entiers inférieurs à 20	2.5 repérer les relations entre les éléments de deux suites d'objets (séquences, nombres plus petits que 100) définies par des règles ; poursuivre un algorithme répétitif d'objets ou de nombres inférieurs à 100 ; * *créer des algorithmes*	2.3. découvrir, reconnaître et utiliser des relations simples et des algorithmes entre des objets ou des nombres 2.4. utiliser des symboles pour nommer des nombres inconnus en résolution de problèmes	2.3. découvrir, reconnaître et utiliser des relations simples et des algorithmes entre des objets ou des nombres 2.4. utiliser des symboles pour nommer des nombres inconnus en résolution de problèmes
2.4. résoudre des problèmes à une opération (addition / soustraction) 2.5. composer oralement des exercices et des problèmes avec des nombres entre 0 et 20.	2.3. résoudre des problèmes à une opération dans les limites du programme **résoudre des problèmes qui requièrent au moins deux opérations de addition et soustraction* 2.4. composer oralement des exercices et des problèmes avec des nombres entre 0 et 100 qui exigent une opération	2.5. résoudre et composer des problèmes relevant de : $a \pm b = x$, $a \pm b \pm c = x$, $a \times b = x$, $a : b = x$, $b \neq 0$ où a, b, c sont des entiers positifs donnés inférieurs à 1 000, et x est l'inconnue	2.5. résoudre et composer des problèmes
	2.6. extraire l'information des tableaux et des listes, récolter des données par l'observation sur un certain thème, représenter les	2.6. récolter des données, les trier et classer selon un critère simple, les organiser en tableaux.	2.6. récolter des données, les trier et classer selon un critère simple, les organiser en tableaux ; * *en donner une*

	données dans des tableaux.		*interprétation simple*.

Tableau D: La progression des objectifs de référence pour le troixième objectif de cadrage :

Utilisation du langage mathématique pour communiquer

Objectifs de référence pour la 1ère année	Objectifs de référence pour la 2ème année	Objectifs de référence pour la 3ème année	Objectifs de référence pour la 4ème année
En fin de 1ère année les élèves vont être capables de :	*En fin de 2ème année les élèves vont être capables de :*	*En fin de 3ème année les élèves vont être capables de :*	*En fin de 4ème année les élèves vont être capables de :*
3.1. verbaliser des démarches de calcul.	3.1. exprimer, oralement ou par écrit, par des mots, une démarche de résoudre un problème (les étapes).	3.1. exprimer clairement et brièvement la signification des calculs faits pour résoudre un problème.	3.1. développer un plan, oralement ou par l'écrit, exprimer sa démarche de résoudre un problème.

Tableau E: La progression des objectifs de référence pour le quatrième objectif de cadrage :

Développement de l’intérêt et de la motivation pour étudier les mathématiques et les appliquer dans divers contextes

Objectifs de référence pour la 1ère année	Objectifs de référence pour la 2ème année	Objectifs de référence pour la 3ème année	Objectifs de référence pour la 4ème année
En fin de 1ère année les élèves vont être capables de :	*En fin de 2ème année les élèves vont être capables de :*	*En fin de 3ème année les élèves vont être capables de :*	*En fin de 4ème année les élèves vont être capables de :*
4.1. manifester la volonté et le plaisir à faire usage des nombres.	4.1. manifester de la curiosité à rechercher les résultats des exercices et problèmes.	4.1. manifester de l’initiative en proposant des approches variées pour résoudre un problème	4.1. manifester de l’intérêt pour analyser et résoudre des problèmes pratiques par des méthodes mathématiques
		4.2. faire preuve d’un comportement adapté envers les membres du groupe de travail pendant les étapes de résolution de problèmes.	4.2 surmonter les obstacles dans la résolution de problèmes, utiliser une démarche par essais et erreurs pour trouver de nouvelles façons de résoudre un problème ;
			4.3. faire preuve d’une capacité à apprendre des autres et à aider les autres dans les activités de résolution de problèmes.

La progression des compétences de communication dans le domaine des mathématiques au niveau secondaire est présentée dans le tableau F.

Tableau F: La progression des objectifs de référence pour le troisième objectif de cadrage : *Développer la capacité de communication en utilisant le langage mathématique au niveau secondaire*

Objectifs de référence pour la 1ère année	*Objectifs de référence pour la 2ème année*	*Objectifs de référence pour la 3ème année*	*Objectifs de référence pour la 4ème année*
En fin de 5ème année l'élève va être capable de :	*En fin de 6ème année l'élève va être capable de :*	*En fin de 7ème année l'élève va être capable de :*	*En fin de 8ème année l'élève va être capable de :*
3.1. identifier les informations essentielles d'un énoncé mathématique présenté en différentes formes.	3.1. différencier les informations d'un énoncé mathématique selon leur nature	3.1. identifier et différencier les étapes d'un raisonnement mathématique présenté en différentes formes	3.1. extraire des informations à caractère mathématique d'une diversité de sources et en saisir la signification globale
3.2. présenter d'une manière claire, correcte et brève, oralement ou par l'écrit, les méthodes et les opérations employées dans la solution d'un problème.	3.2. présenter d'une manière claire, correcte et brève, oralement ou par l'écrit, la succession des opérations dans la solution d'un problème en employant la terminologie et les notations adéquates	3.2. présenter d'une manière cohérente la solution d'un problème en employant des modalités diverses d'expression (mots, symboles mathématiques, diagrammes, tableaux, constructions)	3.2. présenter d'une manière cohérente la solution d'un problème, en corrélant diverses modalités d'expression (mots, symboles mathématiques tableaux, graphes, constructions)
3.3. intérioriser une variété de rôles d'apprentissage au niveau d'un groupe.	3.3. discuter la validité d'une démarche mathématique en motivant ses options.	3.3. avancer des arguments logiques, des idées et des méthodes mathématiques au niveau d'un groupe, employer des diverses sources d'informations pour vérifier et soutenir ses opinions.	3.3. discuter, au niveau d'un groupe, les avantages et les désavantages d'une méthode employée pour la solution d'un problème ou d'une forme de présentation d'une démarche mathématique.

Langue et communication dans les programmes de mathématiques en Norvège

Sigmund Ongstad

La langue dans la partie « Objectifs »

Cette analyse de la place éventuelle de la « langue » dans les programmes de mathématiques en Norvège établira une distinction entre éléments explicites et éléments implicites et entre sens strict et sens large du terme « langue » (Ongstad, 2006a). Elle portera en priorité sur le curriculum national de 2006 (ci-après LK06), en s'attachant tout particulièrement à la fin de la période de scolarité obligatoire (10e année). Elle fera aussi quelques incursions dans le programme de 1997 (L97), et d'autres niveaux/années du LK06.

Le LK06 commence par énoncer en une trentaine de lignes de texte les *objectifs* à atteindre dans cette matière (Utdanningsdirektoratet, 2007). Une ligne seulement (soulignée ci-après-après) concerne expressément la langue et la communication : *La résolution de problèmes fait partie intégrante de la compétence mathématique. Il s'agit d'analyser un problème, de le transposer sous une forme mathématique, de le résoudre et de vérifier la validité du résultat. Le processus comporte des aspects linguistiques, tels que le raisonnement et la communication d'idées* (*Utdanningsdirektoratet*, 2007 :1). Il est très surprenant de ne trouver qu'une seule et unique référence, étant donné la forte influence des théories d'apprentissage centrées sur le langage, dues à Piaget et Vygotsky, sur l'enseignement des mathématiques à dans le monde et en Norvège en particulier, du moins sur un plan rhétorique.

Une deuxième lecture de l'ensemble du chapitre dans une perspective élargie, notamment sémiologique, à la lumière de concepts tels que « culture » et « vécus » montre clairement que la vision des mathématiques que propose le programme est néanmoins assez générale. Ainsi mentionne-t-il expressément (…) *la joie que procure le simple fait de travailler sur les mathématiques*. Elles sont considérées en outre comme une importante composante de la culture et (…) *jouent un rôle majeur dans l'éducation en général, car l'étude de cette discipline influe sur la formation de l'identité, sur la réflexion et la compréhension de soi.* Les mathématiques jouent même un rôle non négligeable en matière de « design » , un concept ayant récemment gagné en importance. Dans cette optique, l'analyse des formes et des structures est jugée essentielle.

A ce stade, à en juger par l'introduction du LK06, le nouveau programme de mathématiques ne se soucie guère de reconnaître expressément l'importance de la langue. Mais on ne saurait en conclure qu'il a des mathématiques une vision restrictive, en se bornant à les considérer comme une discipline scolaire autonome. Il la voit plutôt comme une composante culturelle de vécus personnels. Cet élargissement de l'horizon est important lorsqu'on passe de la dimension explicite du langage à la dimension implicite de la sémiologie et de la communication, la sémiologie étant définie comme « l'étude des expressions *culturelles* en tant qu'éléments signifiants ».

La langue dans les différents domaines

Dans le LK06, de la 1ère à la 10e année de scolarité (élèves de 6 à 16 ans) les domaines d'enseignement des mathématiques sont les suivants : nombres/algèbre, géométrie, mesures, statistiques/probabilité, analyse combinatoire et fonctions. Cette deuxième partie du curriculum (définition du contenu de la discipline) ne fait donc pas expressément référence à la langue, à la sémiologie ou à la communication. Elle ne contient pas non plus d'allusions implicites à ces dimensions de la discipline. Seul le programme de la dernière année du second cycle de l'enseignement secondaire (13e année) comporte un domaine intitulé *« Culture et modèles »*, peut-être (implicitement) apparenté à la sémiologie.

La langue et les « compétences de base »

Le chapitre intitulé *« Compétences de base »* (UD, 2007 : 4) est l'une des parties du LK06 ayant le plus prêté à controverse. L'acquisition de ces compétences est obligatoire dans toutes les disciplines scolaires, pas seulement en mathématiques. Dans la version de 2006, le comité national du programme de mathématiques indique concrètement ce qu'il faut entendre par « compétences de base ». Vu son importance pour bien saisir l'esprit du programme et de la nouvelle réforme nationale, le texte est reproduit ci-dessous dans son intégralité (version anglaise officielle du ministère de l'Education[1]) :

Les « compétences de base » font partie intégrante des objectifs de compétence et concourent ainsi à l'acquisition d'une compétence globale en mathématiques.

Les compétences de base que l'élève doit acquérir sont les suivantes :

La capacité à s'exprimer oralement dans le domaine des mathématiques consiste à savoir prendre des décisions, poser des questions, raisonner, argumenter et expliquer un processus de pensée au moyen des mathématiques. Il s'agit également de pouvoir discuter, transmettre des idées, et développer sa pensée concernant les problèmes et les stratégies de résolution.

La capacité à s'exprimer par écrit dans le domaine des mathématiques consiste à savoir résoudre des problèmes au moyen des mathématiques, décrire un processus de réflexion et exposer des découvertes et des idées à l'aide de dessins, croquis, figures, tableaux et graphiques. L'élève doit savoir utiliser en outre les symboles mathématiques et le langage formel de la discipline.

La capacité à lire dans le domaine des mathématiques consiste à savoir interpréter et utiliser des textes à contenu mathématique, mais se rapportant aussi à la vie quotidienne et professionnelle. Ces textes peuvent comporter des expressions mathématiques, des graphiques, des tableaux, des symboles, des formules et des raisonnements logiques.

La capacité à faire des mathématiques est, cela va sans dire, le fondement même de la discipline. Elle consiste à savoir analyser et résoudre des problèmes, en commençant par des situations et des problèmes de calcul concrets de la vie quotidienne. Pour ce faire, l'élève doit bien connaître et maîtriser les opérations arithmétiques, savoir appliquer diverses stratégies, effectuer des estimations et évaluer la plausibilité des réponses.

La capacité à utiliser des instruments numériques, consiste à savoir les utiliser pour jouer, explorer, visualiser et publier , à apprendre à se servir d'aides numériques pour la résolution de problèmes, les simulations et la modélisation et à savoir juger de l'opportunité d'y recourir. Il importe également de savoir trouver l'information, analyser, traiter et présenter les données au moyen d'outils appropriés, et de faire preuve d'esprit critique à l'égard des sources, analyses et résultats.

Alors que l'introduction générale du programme et la partie consacrée au contenu ne contiennent quasiment pas de références à la langue et à la communication, cette nouvelle partie aborde à présent la relation entre les mathématiques et la langue en « inversant » en quelque sorte les priorités. Jusqu'alors, aucun signal n'avait été donné au lecteur concernant une quelconque « intégration » des deux discours, l'un procédant de la « disciplinarité » rapportée aux mathématiques, l'autre de la « discursivité » rapportée à la langue et à la

[1] Ce texte est ici traduit en français à partir d'une traduction anglaise du texte original.

communication. Les équipes rédactionnelles du LK06 ont assurément toutes eu pour consigne d'expliquer ce qu'implique les trois premières « compétences de base » dans chaque discipline.

Si les *« capacités à s'exprimer oralement/ par écrit... »* (etc.) sont de nature générale et concernent, à l'origine, toutes les disciplines scolaires, la description plus avant de chaque compétence est spécifique. Dès lors, ce que d'aucuns considèrent comme une conception « pédagogique » de la communication est *imposée* par le ministère aux représentants des diverses disciplines. Les compétences sont définies et présentées indépendamment de l'interprétation plus large à laquelle elles peuvent donner lieu sur le plan de la communication ou de la sémiologie.

La langue dans les « objectifs de compétence » à différents niveaux

Le reste du texte revêt la forme d'une énumération (« bullet points ») des objectifs à atteindre dans chacun des cinq grands domaines susmentionnés. Ils sont censés être atteints au terme de la 2^e^, de la 4^e^, de la 7^e^ et de la 10^e^ année de scolarité. En ce qui concerne la 10^e^ année (au cœur de la présente étude), 24 « bullet points » au total (pour les 5 domaines) indiquent ce que l'élève doit savoir faire à différents stades, mais aucun ne mentionne expressément le rôle de la langue ou de la communication. La formulation qui s'en approche le plus est probablement la suivante: «(...) *décrire un espace type et exprimer la probabilité en fractions* ».

Intégration ou rupture ?

Le LK06, en place depuis 2006 donne ainsi la priorité absolue à la disciplinarité dans les trois parties sur les « objectifs généraux », « domaines » et « objectifs de compétences ». La quatrième partie, consacrée aux « compétences de base », privilégie quant à elle la langue et la communication, c'est-à-dire la « discursivité ». *Cette rupture est la caractéristique la plus notable du plan*. Elle fait naître l'incertitude concernant l'orientation principale : sont-ce les objectifs ou les compétences ? On peut voir aussi la partie consacrée aux compétences comme une manière de « forcer » les mathématiques (et les autres disciplines scolaires) à devenir l'instrument, ou le catalyseur, d'une enculturation plus large (voire d'une « *Bildung* ») au lieu d'être une discipline isolée, purement scolaire.

Méthodes et approches ?

Il faut ajouter que l'absence d'un chapitre sur les méthodes et approches est un choix délibéré – politique et pédagogique– du ministère de l'Education. Un tel chapitre aurait pu réfléchir à la manière de résoudre le conflit entre approche mathématique et approche de communication. L'une des conséquences concrètes de l'« oubli volontaire » de cette partie classique de tout curriculum est que les établissements scolaires et les municipalités sont censés élaborer leurs propres programmes –locaux- en montrant clairement l'approche choisie. [En ce qui concerne la possibilité de vérifier quelles sont les valeurs officielles véritablement prioritaires du curriculum national, les résultats des premières séries de travaux ne seront probablement pas disponibles avant le printemps 2008. De plus, peu de manuels scolaires sont parus qui puissent indiquer comment combler ce « vide »].

Pas de rôle pour la langue dès le départ ?

Si l'on compare les résultats de cette brève « enquête » concernant les 13 objectifs de compétence à atteindre au terme de la deuxième année de scolarité, on constate que, même à ce stade, la langue n'a pas de rôle important (nous avons laissé de côté ici les quatre domaines principaux). Ce qui s'en approche le plus, ce sont des formulations assez vagues comme *«parler de (…), les décrire oralement…* » ou très vagues comme « *nommer les jours*, etc. ».

L'enseignement a pour but de faire acquérir à l'élève les aptitudes suivantes :

- savoir compter jusqu'à 100, diviser et multiplier par 10, assembler et répartir des groupes de dix unités ;
- savoir utiliser les nombres réels pour tout calcul et démontrer la magnitude des nombres ;
- savoir effectuer des estimations de montants, compter, comparer des nombres et exprimer des magnitudes numériques de diverses manières ;
- savoir élaborer et utiliser diverses stratégies arithmétiques pour l'addition et la soustraction de nombres à deux chiffres ;
- savoir calculer le double et la moitié d'un nombre ;
- savoir reconnaître, parler des structures et les développer par des schémas numériques simples ;
- savoir reconnaître et décrire les caractéristiques de figures à deux et trois dimensions en termes d'angles, de côtés et de surfaces, ainsi que trier et nommer les figures en fonction de leurs caractéristiques ;
- savoir reconnaître et utiliser une symétrie analogique dans des situations concrètes ;
- savoir composer et analyser des formes géométriques simples, et les décrire oralement ;
- savoir comparer les magnitudes de longueur et d'espace en utilisant des unités de mesure appropriées ;
- savoir nommer les jours, les mois et les périodes simples d'une journée ;
- savoir reconnaître les pièces de monnaie norvégiennes, et les utiliser pour acheter et vendre ;
- être capable de collecter, de trier, de noter et d'illustrer des données simples au moyen d'unités de comptage, de tableaux et de diagrammes en tuyaux d'orgue. .

On constate ainsi que même dans l'optique de l'« initiation » à la discipline, le programme n'accorde pas de place notable à la langue et à la communication.

Quelle place occupent les mathématiques dans le *Tronc commun (Core Curriculum)* ?

Il faut savoir que le Curriculum général du LK06 – également appelé le *« Tronc commun »* - a été approuvé et utilisé, pratiquement sans aucune modification, par les gouvernements successifs de tous bords de ces 13 dernières années (TRMERCA, 1999). Ce texte définit six types d'êtres humains, liés au concept allemand de « Bildung » à l'aide des qualificatifs suivants : « spirituel », « créatif », « (professionnellement) actif », « progressiste », «social » et « écologiste ». Ces divers aspects sont censés être réunis dans un *être humain intégré*, (un septième type d'être humain pour certains).

Cela étant, ce chapitre du LK06 souligne que pareille intégration est inévitablement *source de dilemme* et présente pour illustrer le problème 17 oppositions concrètes. En outre les 17 objectifs doubles définis dans ce chapitre intitulé *L'être humain intégré* ne laissent pas de place immédiate aux objectifs généraux des mathématiques. Ces 17 « objectifs » sont censés montrer comment les objectifs d'une même discipline et ceux de disciplines différentes peuvent entrer en conflit si l'on tente de les intégrer.

Si cette entreprise éducative globale et (trop ?) ambitieuse confère à l'évidence de nombreux rôles aux autres disciplines scolaires et établit d'importantes connexions, les mathématiques n'y jouent, en revanche, qu'un rôle très modeste, si tant est qu'elles en aient un. L'un des rares textes les mentionnant est celui se rapportant à l'« être humain créatif » dans lequel sont évoquées trois grandes traditions (pratique, théorique et culturelle) : *Les apprenants sont confrontés à la tradition théorique dans les disciplines dans lesquelles le nouveau savoir s'acquiert par le <u>développement théorique</u>, vérifié par la logique et les faits, l'expérience, la preuve et la recherche. C'est le cas des langues vivantes, des mathématiques, des sciences sociales et des sciences naturelles* (RMERCA, 1999 : 29). Ce texte est illustré d'une page des écrits de Pythagore (en grec ancien).

Si ce lien très lâche (ou quasiment inexistant ?) entre les mathématiques et le curriculum général reflète une situation générale, l'enseignement des mathématiques semble avoir de sérieuses difficultés à développer des arguments pédagogiques convaincants pour montrer dans quel sens et dans quelle mesure il entend véritablement concourir à la « Bildung », ou à « l'être humain intégré ». Ce n'est pas qu'il ne le fasse pas, mais il semble qu'il ait failli à sa tâche pédagogique, en ce qu'il n'a pas su en informer expressément les élèves et les lecteurs.

Par conséquent, on peut même se demander si la forte position qu'ont pu occuper les mathématiques, dans le discours social et dans l'esprit des parents et des élèves, n'est pas plus néfaste que bénéfique à l'idée de disciplines scolaires visant à faire de l'élève un être humain « spirituel », « créatif », « (professionnellement) actif », « progressiste », « social », « écologiste », et, finalement, « intégré ».

L'analyse de la partie du LK06 concernant les mathématiques a révélé que la dimension communicationnelle et les caractéristiques propres à telle ou telle discipline n'étaient quasiment pas *intégrées.* Ce constat semble confirmer l'impression que l'on a généralement des mathématiques comme étant une discipline relativement « isolée » par rapport aux ambitions du programme en matière de « Bildung » (Ongstad, 2006b). Il y aurait donc de bonnes raisons de douter de la volonté d'utiliser les mathématiques comme un moyen d'atteindre une fin au lieu de les concevoir comme une discipline autonome.

La langue et la communication dans l'ancien Curriculum (L97) ?

Si l'on compare les programmes de mathématiques du L97 et du LK06, on constate qu'ils se ressemblent, surtout en ce qui concerne la forme et les grandes parties du programme. Mais, si l'on étudie de plus près *l'Introduction* du Programme du L97 dans laquelle sont décrits le contenu et les objectifs pédagogiques de la discipline, de nombreuses formulations témoignent d'une compréhension plus profonde et plus explicite de la relation entre les mathématiques et le monde extérieur que dans le Programme de 2006 : *Les mathématiques ont de nombreux modes d'expression différents et connaissent une évolution constante. Elles sont une science, un art, un métier, une langue et un instrument* (RMERCA, 1999 : 165). Ou encore : *Le programme de mathématiques vise à lier étroitement l'étude de cette discipline à l'école et la réalité mathématique du monde extérieur. Le vécu, le jeu et l'expérimentation au quotidien contribuent à l'élaboration des concepts et de la terminologie mathématiques* (RMERCA, 1999 : 165). Et cet autre passage : V*ision et* *compétences mathématiques sont nécessaires à la compréhension et à l'utilisation des nouvelles technologies. Elles sont également un élément de communication majeur dans les sociétés d'aujourd'hui.* (RMERCA, 1999 : 165). Et enfin : *Une bonne connaissance du langage, des symboles et des concepts est la condition préalable des progrès en mathématiques* (RMERCA, 1999 : 166).

On ne saurait honnêtement comparer les deux programmes, étant donné que les auteurs du LK06 n'ont pas été « autorisés » à dépasser une page pour la présentation générale du projet. Par ailleurs, rappelons que le LK06 ne comporte pas de chapitre sur les différentes « approches » (pour laisser semble-t-il davantage de liberté aux autorités éducatives locales). Il n'en reste pas moins que le L97 entendait établir une vision *constructiviste* des rapports entre d'importants aspects de la langue, d'une part, et des mathématiques, d'autre part, une volonté nettement moins affirmée dans le LK06 : *L'élève est déjà familier de certains concepts mathématiques lorsqu'il entre à l'école – même s'il a parfois du mal à exprimer verbalement ce savoir* (RMERCA, 1999 : 1966). Ou encore : *Les apprenants élaborent leurs propres concepts mathématiques. A cet égard il importe de privilégier la discussion et la réflexion.* (RMERCA, 1966 : 167). Toutefois, il convient d'ajouter que cette conception de la langue semble procéder essentiellement d'une vision *conceptuelle* (classique) ou fondamentalement *sémantique* visant à déterminer les éléments de langage les plus pertinents pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

« Disciplinarité » , « discursivité » et « langue d'enseignement »

Sur le plan formel, les descriptions des dimensions « Langue et communication » dans le chapitre *Compétences de base* du LK06 sont solides, précises et explicites. Mais, en général et dans la pratique, la séparation de l'élément linguistique et du contenu fondamental de la discipline mathématique est plus ou moins totale. Il n'est guère donné d'indications aux lecteurs/enseignants de ce que devrait ou pourrait être une relation raisonnable, valable et pédagogiquement pertinente entre les deux. C'est là une « leçon » très importante à retenir pour les travaux ultérieurs du Conseil de l'Europe sur la langue d'enseignement dans les différentes disciplines scolaires – et ce, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, certains milieux peuvent être totalement « étrangers » à l'idée de considérer les mathématiques comme un langage, et rejeter le concept d'« intégration » comme une perte de temps et d'énergie. Ce point de vue s'accompagne souvent d'une « fierté » académique liée aux nombreuses victoires remportées par les mathématiques, véritable langage scientifique universel permettant de parer au risque d'une « Tour de Babel ».

Deuxièmement, il faudra en tout état de cause relever le défi et convaincre (par la communication) les enseignants et les concepteurs des programmes de mathématiques qui reconnaissent l'importance de la relation qu'il serait possible de trouver un juste « équilibre » entre les mathématiques et le langage. Troisièmement, il ne sera pas évident de déterminer le cadre conceptuel et les notions et perspectives appropriés, étant donné les nombreux contextes scolaires et culturels susceptibles de convenir. Enfin, les différences de profil assez marquées des professeurs de mathématiques de divers pays (Ongstad, 2006b) peuvent influer, de diverses manières, sur le degré de pénétration, dans l'enseignement primaire et secondaire des pays européens, de l'approche fondée sur la « langue d'enseignement ».

Conclusion ?

L'une des conclusions pourrait être entre autres que certains agents/acteurs veulent un programme *entrelacé*, tandis que d'autres préfèrent que ses dimensions/composantes restent *séparées*. Certains ne souhaiteront peut-être utiliser la langue que comme un moyen de communication pratique. S'il y a eu, dans ce domaine, une certaine évolution entre 1997 et

2006, la vision conceptuelle semble avoir disparu. On peut dire à la rigueur que l'approche formelle « communicative » a remporté une victoire (formelle) à la Pyrrhus et ce, uniquement en ce qui concerne quelques aspects isolés du programme. Cela étant, si les futures évaluations devaient mettre davantage l'accent sur les compétences de base que sur les strictes compétences mathématiques, les ambitions « communicationnelles » pourraient être prises en en considération et s'avérer pertinentes dans la pratique.

Références

Ongstad, S. (2006a) Mathematics and Mathematics Education – Language and/or Communication ? Triadic Semiotic Exemplified. *Educational Studies in Mathematics* (Les mathématiques et l'enseignement des mathématiques – Langue et/ou communication? Exemple de « triade sémiologique ». *Educational Studies in Mathematics (Etudes pédagogiques des mathématiques),* 61/1-2.

Ongstad, S. (2006b) Teacher of mathematics or Teacher Educator? Positionings and problematisations. In (Professeur de mathématiques ou Educateur pédagogique? Problématiques et points de vue)

Hudson, B. et J. Fragner (Coordinateurs de l'étude) *Researching the Teaching and Learning of Mathematics II* (*Recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques II)*. Linz: Trauner.

TRMERCA (1999) *Le Curriculum de l'école obligatoire, en Norvège (période de dix ans).* Oslo: Ministère de l'Education du Royaume de Norvège, Département de la Recherche et des Questions religieuses (L97).

Utdanningsdirektoratet (2007) *Le programme de mathématiques en tant que discipline scolaire* (LK06). Analyse en date du 31.05.07.

www.udir.no/.../Fastsatte_lareplaner_for_Kunnskapsloeftet/english/Mathematics_subject_curriculum.rtf

Culture, language and mathematics education: aspects of languages in English, French and German mathematics education (disponible an anglais seulement)

Birgit Pepin, University of Manchester, United Kingdom

Abstract

This paper analyses the ways in which the particular culture of the mathematics classroom and the culture at large influence language in mathematics education in three countries: England; France; and Germany. Drawing on two recent comparative studies of mathematics education in the three countries, the findings of the research demonstrate that ideas, beliefs and principles, and every system's cultural and philosophical traditions, penetrate the educational enterprise in terms of language forms. It is argued that language in mathematics education needs to be understood in terms of the larger cultural context, and that an understanding of the wider meaning of language forms in a particular context can enhance communication between students and teachers, as well as between those involved in mathematics education across countries.

Introduction

Although language and communication factors have long been recognised to significantly influence mathematics teaching and learning, the question of how thought and language are related, and how this varies in different cultural systems, is currently been re-examined. Lean, for example, studied indigenous counting systems of Oceania, Polynesia and Melanesia. He found out that every distinct language has an associated unique counting system. Furthermore, he asserts counting systems are an integral part of language and that language is inextricably bound to culture (Lean, 1992 and 1995). Harris (1987) investigated measurement concepts in Aboriginal communities in Australia. She supports the view that aspects of indigenous mathematics, language and culture are inseparable. Other scholars, such as Zevenbergen (1995) and Stephen Harris (1990), also emphasise the importance of locating education theory and practice within cultural framework, and they distinguish between 'European' and 'Aboriginal' mathematics and culture. Harris (1990) claims that

> "the nature and degree of the difference between Aboriginal and European culture is so great that the only honest conclusion we can arrive at is that they are largely incompatible. … The degree of difference is so great that it is harder to find what they have in common in cultural terms than it is to see the differences."
>
> (Harris 1990, p.9)

Thus, whilst comparisons have been made between Aboriginal and European cultures, both are in themselves viewed to be homogeneous. What are the characteristics of a so-called 'European' culture? No distinction is made between the different European countries' cultural and educational traditions. This paper helps to fill that gap. Differences of language in mathematics education are identified in the English, French and German context. Furthermore, whilst it is re-emphasised that culture influences mathematics teaching and learning, and in particular mathematics language and communication, it is claimed that there are differences between English, French and German cultural traditions which help to understand the ways in which mathematics is communicated in classrooms.

Culture, language and mathematics education

Mathematicians and mathematics educators communicate using language; they use it to teach mathematics, to share their understandings and to clarify and test understanding. Von Glasersfeld points out that communication is not as straightforward as one might assume.

> "Educators have spent and are rightly spending much time and effort on curriculum. That is, they do their best to work out what to teach and the sequence in which it should be taught. The underlying process of linguistic communication, however, the process on which their teaching relies, is usually simply taken for granted. There has been a naïve confidence in language and its efficacy. Although it does not take a good teacher very long to discover that saying things is not enough to 'get them across', there is little if any theoretical insight into why linguistic communication does not do all it is supposed to do."
>
> (von Glasersfeld 1983, p.43)

Bishop (1992) challenges the naïve view of the curriculum as an instrument for instruction regardless the cultural perspective.

> "The cultural perspective requires us to culturalise the curriculum at each of the levels, and demonstrates that no aspect of mathematics teaching can be culturally neutral. The cultural 'messages' in the educational enterprise are created and manifested by people. People create the national and local curriculum statements, people write the books and computer programs, people bring their cultural histories into the classroom, and people interpret and reconstruct the various messages."
>
> (Bishop 1992, p.185)

This confirms that people, with their beliefs, principles and practices that are underpinned by the 'culture' of the individual system or country, are central to the educational enterprise. Mathematical knowledge is constructed, interpreted and mediated by people, and language is part of communicating mathematical knowledge.

In mathematics classrooms, as in other subject lessons, language is not limited to the production of spoken or written texts, but it also includes other communication forms, such as gestures, board representations and charts, for example. While speaking or writing, non-verbal communication is used, intentionally or unintentionally. Both verbal and non-verbal communication often reflects the beliefs and thoughts of those who try to communicate. Thus, language can be regarded as an indicator and symbol of the belief system of the communicator's actions. However, patterns of communication are different in different 'cultures' and nation countries, because they are 'made of' and contain elements of traditions and practices that are linked to cultural and socio-economic conventions within each country or societal group. This helps to place the role of resource material, such as textbooks, and pedagogical practices into the way one communicates mathematics and convey its meaning and importance within every education system.

This paper explores communication structures used in mathematics classrooms in England, France and Germany. Essentially, it reports on findings emerging from research on mathematics teachers' work in the three countries and from research on mathematics textbooks and their use in English, French and German mathematics classrooms. Hundreds of hours of lesson observation were recorded in mathematics classrooms of the three countries. This article comes out of the context of these two comparative studies of mathematics teaching and learning in the three countries, and is not a result of an intensive language-based piece of research where the focus of these observations was language in the mathematics classroom. Instead, the data of the two comparative studies were re-examined with the focus on the use of language in mathematics education and the ways mathematical meanings were expressed by teachers and textbooks of the three countries. Furthermore, selected differences are examined and explained with regard to the cultural context and educational traditions of each individual country.

The language of teaching

> "Observing means interpreting; experience is interpreted through the patterns of knowledge and the value systems that are embodied in culture and in language."
>
> (Halliday 1978, p.203)

Halliday sees language in a socio-semiotic perspective, that is to say that he, firstly, refers to a culture, or social system, as a system of meaning. Secondly, he is concerned with the relationships between language and social structure (as one aspect of the social system), thus language is understood in its relationship to social structure. His rationale for choosing this particular angle is the following.

> "Learning is, above all, a social process; and the environment in which educational learning takes place is that of a social institution, whether we think of this in concrete terms as the classroom and the school, with their clearly defined social structures, or in the more abstract sense of the school system, or even the educational process as it is conceived of in our society. Knowledge is transmitted in social contexts, through relationships, like those of parent and child, or teacher and pupil, or classmates, that are defined in the value systems and ideology of the culture. And the words that are exchanged in these contexts get their meaning from activities in which they are embedded, which again are social activities with social agencies and goals."
>
> (Halliday 1985, p.5)

Thus, he puts language, context and text together. The notions of 'context of situation' and of 'context of culture' are both derived from Malinowski's writings, and both notions are necessary for an adequate understanding of the text. In essence, they say that the language is all part of the immediate situation and derives its meaning from the context in which it is used. In the following, examples are given of how language in mathematics education is influenced by the context of particular countries.

The history of mathematics has shown that the language of mathematics has developed, and is slowly changing as we speak, in order to meet social and individual needs. Teachers and students are likely to play a small part in this development. One example of the changes over time is the use of signs in English, French and German classrooms. Both in France and England, the times sign 'x' is used to indicate multiplication, whereas in Germany this is signified by a dot. This can be historically explained. In 1631 the English priest William Oughtred introduced the sign 'x' for 'times', whereas the common signs in Germany for multiplication ('.') and for Division (':') go back to the scholarly writings of Gottfried Wilhelm Leibniz in 1693. Another important influence on German mathematical representation was the work of Adam Riese in his *Rechenbuch* of 1522.

Mathematical language registers are likely to respond to the needs of a changing system or society. For example, metre, centimetre, millimetre are words that are commonly used and understood as means for measurement of distances. The degree to which they are understood is however different in the three countries. In England, children often do not have a notion of metres, centimetres and millimetres, because they still use inches, feet and yards in their everyday language at home. This is only slowly changing. In Germany and France, this is different because they have never used imperial measurements. In France, even the 'decametre' is relatively commonly used, and taught in schools.

In some languages, written mathematics can reveal patterns that are not recognisable in the aural form. For example, the French expression for 80 is *quatre-vingts* (four twenties), and for 96 is *quatre-vingt-seize* (four twenties and sixteen). It must be relatively difficult for young French children just to write down the numbers, because every time small calculations are needed. English numbers read comparatively easy: *eighty* for 80 and *ninety-six* for 96, straightforward reading from left to right. However, this is not true for numbers between 10 and 20. In fourteen, for example, the four is read first, and then the ten. This is similar to the ways numbers are written and read in German. For example, 96 is spoken as *sechsundneunzig* (six and ninety). That means that a pupil writing down the number, first has to listen to 'the end of the number', before being able to write it down. But 127 is spoken as *einhundertsiebenundzwanzig* (one hundred seven and twenty), starting with the hundred, followed by the digits, and then the tens. How confusing! The point to be made here is that it is necessary for teachers to be sensitive to the language of mathematics and its sometimes arbitrary nature. The composition of numbers may cause confusion in the minds of young children and subsequently prevent them from focusing on and understanding the notions teachers are trying to teach.

In terms of pedagogy, a typical situation in a French classroom is the following:

> Teacher: "What is a *médiatrice*?"
>
> Pupils are hesitant, don't know what to answer exactly, because they know that the teachers wants the definition that they had learnt previously.
>
> Teacher: "This is stuff from last year's programme, and we have recently revised it. … Can't you remember? Look in your *cahier de cours*."
>
> Pupil reads and recites the definition of a *médiatrice*.

This situation is characteristic for France (Pepin, 2002). Mathematical terms are taught and expected to be learnt and their definition recited by pupils. Pupils often have to look up these terms, because they have difficulties with these 'foreign' words and cannot remember their meaning. The *médiatrice* is one of the four *droites remarquables dans un triangle*, one of the four 'notable lines in a triangle': *médiane* (side bisector)*, hauteur* (height)*, médiatrice* (perpendicular bisector)*, bissectrice* (angle bisector). The word *médiatrice* is of Latin origin and thus does not 'show' what is meant by it. French textbooks often provide a mini-dictionary and a summary of definitions of geometrical terms at the back of the textbooks, so that the students can refer to it and look up terms. The English equivalent 'perpendicular bisector', or German equivalent *Mittelsenkrechte* says exactly what it is: it stands perpendicular to the side and it divides the side in two. Thus, when comparing the use of language in a geometry lesson, it appears that parts of the curriculum are easier learnt in one language than in another. In this case, geometry appears easier in German and English than in French. Geometry is highly regarded in France, in particular Euclidean geometry. It is believed that with the help of Euclidean geometry logical thinking and reasoning can be enhanced.

Secondly, this situation is characteristic for France, because there are clear competencies and mathematical notions that teachers have to teach in a certain year. These are defined by the curriculum- *les programmes*. Teachers know what should have been taught and learnt the previous year, and they refer to and build on it in lessons. Thirdly, French teachers typically ask pupils to keep two kinds of books: the *cahier de cours*; and the *cahier d'exercices*. In the *cahier de cours* pupils are expected to record the *cours* – the essence of the lesson, written in sentences together with a worked example. The *cahier d'exercices* is for exercises and any kind of preparatory work for the *cours*. This routine can be understood from traditions to keep 30 children together. Teachers commented that with the *cahier de cours,* those pupils who did not understand during the lesson had the chance to learn at home with the help of what was recorded in the *cahier de cours*. French teachers were trying to teach pupils as a whole class and, although they were aware that not everybody might have understood at the end of the lesson, they knew that at least pupils recorded the main points of the lesson in their *cahier de cours*. Pupils might have got to different stages in the lesson, but at the end of it, everybody was writing the statement and an example in their *cahier de cours*, so that they could learn and revise the lesson at home if necessary.

This has to be viewed in the French context of cultural and educational traditions. In terms of philosophical underpinnings, France is one of the heartlands of encyclopaedism, with its associated principles of rationality and *égalité*. The principle of rationality encourages the teaching of subjects which are perceived to encourage the development of rational faculties. Mathematics counts as one of those subjects, and it thus has a high status in France. Egalitarian views aspire to remove social inequalities through education and promote equal opportunities for all pupils. Every pupil has the *right* to be taught the entire curriculum, and in ways that are thought to benefit the majority of pupils. This is reflected in, for example, their use of the same way of division (see later), and routines such as the *cahier de cours*.

In contrast, the main underpinning philosophy of the English education system is humanism, with its associated principles of individualism, amongst others. English education is said to be child-centred and individualistic, and the interaction between teacher and pupil is greatly emphasised. One of the claims about humanism is that it is anti-rational and that England has in the past given 'little weight in education to rational, methodical and systematic knowledge objectives' (Holmes and McLean 1989). This can be understood in the light of the philosophy of humanism which assumes that to acquire knowledge is not a logical, sequential and standardised process, as rationalists would claim, but learning is regarded as 'intuitive'. The acquisition of knowledge was the outcome of the interaction between the inherent qualities of the learner and different materials appropriate to the student's development. Therefore, the content of education should be selected in the light of individual differences.

Germany espouses mainly humanistic views, based on Humboldt's ideal of humanism. Humboldt's concept of *Bildung* searches for 'rational understanding' of the order of the natural world. It incorporates encyclopaedic rationalism as well as humanist moralism, and basically promotes the unity of academic knowledge and moral education. The German humanist rationale is never allowed to avoid the importance of the study of mathematics and science subjects. Examples of the two latter cultural traditions (England and Germany) are given under 'genres' and 'the language of texts'.

Genres

> "If a reader is to be satisfied with a piece of sustained prose, whether it be a story, an account of a scientific experiment, a record of events, or just a paragraph of instructions as to how to get to one place from another, there has to be some 'shape' to it. In other words, there will be an organisational pattern evident within the writing."
>
> (Gannon 1985, p.57)

In all language discourse there are structural forms which are used to make meaning and which are accepted by the social system. The social context in which mathematical texts are generated carry with them the underpinning beliefs and philosophies that give life to the structure and definitions of the text. *Genres* are, according to Mousley and Marks (1991), conventionalised forms of texts. They refer to the ways we use language, and we use traditional patterns of language for specific purposes. Different genres have different structures and intentions. The choice of different genres is prescribed by individual situations, needs and purposes within the traditions of a culture.

> "Discourse carries meanings about the nature of the institution from which it derives; genres carry meanings about the conventional social occasions on which texts arise." (p.20)

Examples of genres are structures of mathematics textbooks in England, France and Germany (Haggarty and Pepin, 2002). For example, French mathematics textbooks are structured in a very particular way. Firstly, they are usually divided into three sections according to the structure of the *programmes* (the curriculum): numbers and algebra; statistics; and geometry. Every chapter is then divided into three parts: *activités; l'essentiel; exercices* (activities- essential- exercises). The activities are small investigations, practical or cognitive activities (sometimes bordering on exercises) which are intended to introduce pupils to a notion. Teachers usually choose one or several of those activities. *L'essentiel* corresponds to the essential part that needs to be taught and understood, in words and in worked examples. This is the *cours* and teachers usually compose their own *cours* for pupils to write in their books. The third part accommodates exercises, sometimes in order of difficulty.

The part that distinguishes French from English and German textbooks is, amongst other factors, the *activités* (small investigations) part. In German textbooks, after a short section with selected introductory exercises and the main 'message' or formula followed by worked examples, the majority of the sections consists of exercises. English textbooks also offer mainly exercises, interspersed with some points for discussion or investigations.

Why is it different in France? There is clearly an understanding in France that these cognitive activities help pupils to understand the notion being introduced by the teacher. In contrast to the 'old' *cours magistral* (lecture type teaching), teachers and inspectors claim that the activity approach is a 'softer' way to teach mathematics. In terms of French educational traditions, it seems to fit in with Piaget's notions of constructivism and their associated teaching approaches. In the French pedagogy, teachers focused on developing mathematical thinking which included exploring, developing and understanding concepts, and mathematical reasoning. They tried to forge links between skills and cognitive activities on the one hand, and concepts on the other. Relatively little time was spent on routine procedures. The emphasis was on process and not the result. These approaches reflect the ideal of rationality (in encyclopaedism) embodied in the notion of *formation d'esprit*.

On the other hand, in English classrooms the major aim was to convey a mathematical concept and let pupils get as much practice as possible, with the help of exercises from the textbook. The emphasis was on the skill side of mathematics and results- all approaches that can be traced back to (English) humanistic philosophies which do not emphasise the rational training of the mind.

In Germany, teachers' pedagogies reflected a relatively formal view of mathematics which included logic and proof. The teacher's role was that of the explainer who taught the structure of mathematics through an 'exciting' delivery and by adapting the structured textbook approach meaningfully. Logical thinking, the core of German humanist tradition, was regarded as important. The invention of new solutions or procedures was not encouraged, and lessons appeared relatively formal and traditional in terms of their mathematical content.

The language of texts

> "[The way we usually think of 'meaning' is] conditioned by centuries of written language. We are inclined to think of the meaning of words in a text rather than of the meaning a speaker intends when he or she is uttering linguistic sounds. Written language and printed texts have a physical persistence. They lie on our desks or can be taken from shelves, they can be handled and read. When we understand what we read, we gain the impression that we have 'grasped' the meaning of the printed words, and we come to believe that this meaning was in the words and that we extracted it like kernels out of their shells. We may even say that a particular meaning is the 'content' of a word or of a text. This notion of words as containers in which the writer or speaker 'conveys' meaning to readers or listeners is extraordinarily strong and seems so natural that we are reluctant to question it."
>
> (von Glasersfeld 1983, p.51-52)

In this part, we focus on textbooks as part of the written and spoken mathematical language. In English, French and German society, written texts hold a powerful place. This is exemplified in the above statement by von Glasersfeld. Previous research (Pepin and Haggarty, 2001) has shown that textbooks are extensively used by teachers in the three countries, and that teachers' constructs of mathematics are manifested in their practices (Pepin, 1999a) which are, in turn, underpinned by the educational and cultural traditions of the individual countries (Pepin, 1999b). It is suggested that within a particular country, textbooks reflect the significant views of what mathematics is, the mathematics that students need to know, and the ways that mathematics can be taught and learnt. Thus, what appears in mathematics textbooks is influenced by the multi-faceted aspects of an educational culture, and can therefore provide a window onto the mathematics education 'world' of a particular country. It is also assumed that teachers mediate mathematics textbooks in their lessons in different ways. In France and Germany, for example, the textbook is regarded as the key element of teaching and learning, whereas in England textbooks are viewed as one of many resources that teachers use in their classroom.

In all three countries, to a greater or lesser extent, textbooks are used for three kinds of activities: for teaching in order to lay down rules and conditions; for explaining the logical processes and going through worked examples; and for the provision of exercises to practice. Teachers in all three countries emphasised the use of textbooks for exercises. There were, however, differences in the extent teachers used them with respect to the two other categories. French teachers, for example, used the books for explanations, but 'insisted' on providing the rules and essence of the lesson (*cours*) without and in a different way than the book. German teachers purposefully used different worked examples than those in the textbooks, in order to initiate class discussion about the problems that might be encountered.

In terms of pedagogy, and this supports teachers' use of textbooks, English teachers spent relatively little time on explaining concepts to the whole class. Unless the lesson took the form of an 'investigation', most English teachers introduced and explained a concept or skill to students, gave examples on the board and then expected pupils to practice on their own in small groups. They usually gave them exercises to do from the textbooks, while they saw it their duty to attend to individual pupils. This can be understood in the light of traditions of individualism, one of the humanistic ideals. There was the espoused view that teachers had to attend to the need of the individual child.

French, and in particular German, teachers devoted a substantial proportion of the school day to whole-class teaching. French teachers, reflecting egalitarian views, expected the whole class to move forward together. They tried to pose thought-provoking problems, or chose cognitive activities from the textbook, and expected students to struggle with them. Then they drew together ideas from the class and the whole class discussed solutions which usually led to the formulation of the *cours*. German teachers used a more conversational style where they tried to involve the whole class in a discussion about a particular problem. The emphasis was on understanding, part of Humboldt's humanistic ideals. Typically, a teacher brought pupils to the board and discussed their mistakes and understanding with the whole class.

Teachers often assume that if books (and tests) are written, and in some countries selected by the ministry, for a specific grade level, most students of that age or grade will be able to understand the material. Studies into the readability of mathematics texts, for instance, have been carried out (for example, Fitzgerald 1980), with the result that generally 'readability levels' are recognised to be too high for the intended readership. In Germany and England, different textbooks are published for different achievement groups. In Germany, differences are made between mathematics textbooks for the three school forms of the tri-partite system: the *Gymnasium* (grammar school); the *Realschule* (technical school); and the *Hauptschule* (secondary modern). In England, where pupils are usually either 'streamed' in achievement-oriented form groups, or 'setted' for each subject, three 'levels' of textbooks exist for different achievement groups which differ in content as well as in text complexity. Only in France is it expected that all pupils follow the same textbook in any particular year. This particularity of France can be viewed in the light of egalitarian views, but also in terms of historical developments which were, in turn, influenced by prevailing cultural and philosophical traditions. Historically, the Haby reforms of 1975 established an essentially common core of lower-secondary education, the *collège unique*, and in 1977 a common curriculum was introduced. Since then, the subsequent education ministers have fought hard to prevent *les filières* (streaming). They argue that every child has the right to the entire curriculum which is reflected in a common textbook for all pupils of an age group.

Written ways of representing mathematical calculations are also linked to common practices in individual countries. One example is the representation of division. In England, different teachers and primary schools prefer different ways of writing division. This has as a result that in year 7, English secondary teachers are faced with the problem of 'harmonising' 30 children's ways of representing division, together with their associated structures of thinking. In Germany and France, this is more standardised. The following examples refer to Germany and France respectively.

Germany: 171 : 5 = 34,2

$$
\begin{array}{l}
\underline{15}\\
\ \ 21\\
\ \ \underline{20}\\
\ \ \ \ 10\\
\ \ \ \ \underline{10}\\
\ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

France:	171	5
	21	34,2
	10	
	0	

Whilst there is no explanation how these different representations have developed, it is nevertheless significant that German and French children are obliged to use one way of representing division, whereas English children are encouraged to use what they feel helps their knowledge construction best. One could argue that individualism in England supports this attitude, whereas egalitarian views in Germany and in particular in France necessitate that all children need the same way of calculating and representing long division.

Conclusions

> "Every child in every society has to learn from adults the meaning given to life by his society; but every society possesses with a greater or lesser degree of difference, meanings to be learned. In short, every society has a culture to be learned though cultures are different."
>
> (Levitas 1974, p.3)

Intentionally or unintentionally, teachers mediate and teach the language of mathematics in their classrooms, and pupils are given the opportunity to speak and write mathematics. On the one hand, there is the particular culture of the mathematics classroom which Nickson (1992) describes as

> "the product of what the teacher and pupils bring to it in terms of knowledge, beliefs, and values, and how these affect the social interactions within that context. It is all too easy to assume that these invisibles of the cultural core are shared by all participants and that there is a harmony of views about the goals being pursued and the values related to them. … There is more possibility for choice and more possibility that those choices will be guided by different beliefs and values. Consequently, there will be greater variation in the cultures of mathematics classrooms."
>
> (Nickson 1992, p.111)

The particular context of the classroom is also part of the larger institutional (school) and societal context with its embedded values, beliefs and traditions of a particular education system which may be manifested in adopted curricula, educational practices, systemic features, to name but a few. These institutional and societal features represent a second source of influence on the language in mathematics classrooms.

This paper has attended to language in mathematics classrooms in three European countries: England, France and Germany. It is concerned with the ways the particular culture of the mathematics classroom and the culture at large influence language and communication.

Every country or system has its own language 'rules' which are underpinned by the system's cultural and philosophical traditions, and it is through language forms that these are mediated. From teachers' discourse and the written texts in textbooks, pupils receive powerful messages about the nature of mathematics, about its teaching and learning and about its value in society. Teachers teach their pupils, albeit unconsciously, which forms of knowledge and communication merit recognition and are acceptable within the dominant culture and traditions of any society, and hence within the classroom. It is important to recognise that language in mathematics carries meanings which are influenced by a complex mixture of teachers and pupils' personal conceptions of mathematics teaching and learning, and each country's educational and intellectual traditions. Thus, it is suggested that a more language-sensitive approaches to the teaching of mathematics is to be encouraged. Furthermore, it is argued that language in mathematics education needs to be understood in terms of the larger cultural context, and that an understanding of the wider meaning of language forms in a particular context can enhance communication between students and teachers, as well as between those involved in mathematics education across countries.

References

Bishop, A.J. (1992) 'Cultural Issues in the Intended, Implemented and Attained Mathematics Curriculum', in G.C. Leder (ed) *Assessment and Learning of Mathematics*, Hawthorn, Victoria: Australian Council for Educational Research, pp.169-89.

Fitzgerald, G.G. (1980) 'Readability of the Fry sample procedure', *Reading Research Quarterly* 15 (4): 489-93.

Gannon, P. (1985) *Assessing writing: Principles and Practice of Marking Written English*, London: Edward Arnold.

Haggarty, L. and Pepin, B. (2002) 'An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German Classrooms: who gets an opportunity to learn what?' , *British Educational Research Journal* 28 (4).

Halliday, M.A.K. (1978) *Language as Social Semiotic: The Social Interpretation of Language and Meaning*, London: Edward Arnold.

Halliday, M.A.K. and Hasan, R. (1985) *Language, context and text: Aspects of language in a social semiotic perspective*, Geelong, Victoria: Deakin University.

Harris, P. (1987) *Measurement in Tribal Aboriginal Communities*. Darwin: Northern Territory Department of Education.

Harris, S. (1990) *Two way aboriginal schooling.* Canberra: Aboriginal Studies Press.

Holmes, B. and McLean, M. (1989) *The Curriculum- a comparative perspective*, London: Routledge.

Lean, G.A. (1992) *Counting systems of Papua New Guinea and Oceania.* Unpublished PhD thesis, Papua New Guinea University of Technology, Lae, Papua New Guinea.

Lean, G.A. (1995) *Counting systems of Papua New Guinea and Oceania* (3rd ed., Vols. 1-24). Lae, Papua New Guinea: Papua New Guinea University of Technology.

Legrand, P. (1997) *Les maths en collège et en lycée*, Paris: Hachette.

Levitas, M. (1974) *Marxist perspective in the sociology of education*. London: Routledge & Kegan Paul.

Mousley, J. and Marks, G. (1991) *Discourses in Mathematics*, Geelong, Victoria: Deakin University.

Pepin, B. (1999a) Epistemologies, beliefs and conceptions of mathematics teaching and learning: the theory, and what is manifested in mathematics teachers' practices in England, France and Germany. In Hudson, B., Buchberger, F., Kansanen, P. and Seel, H. (1999) *Didaktik/Fachdidaktik as science(s) of the teaching profession. TNTEE Publications*, Volume 2 (1), pp. 127-46.

Pepin, B. (1999b) The influence of national cultural traditions on pedagogy: classroom practices in England, France and Germany, in J. Leach and B. Moon (eds) *Learners and Pedagogy*, London: Sage Publications.

Pepin, B. and Haggarty, L. (2001) 'Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures', *Zentralblatt for the Didactics of Mathematics*, 33 (5).

Pepin, B. (2002) ‘Different cultures, different meanings, different teaching’ in L. Haggarty (ed) *Teaching Mathematics in Secondary Schools*, London: Routledge.

Nickson, M. (1993) The culture of the mathematics classroom: an unknown quantity? in D.A. Grouws (ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillian Publishing Company.

von Glasersfeld, E. (1983) ‘Learning as a constructivist activity’, in J.C. Bergeron and N. Herscovics (eds) *Proceedings of the Fifth Annual Meeting*, vol.1, Montreal: The North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, pp.41-69.

Zevenbergen, R. (1995) *The construction of social difference in mathematics education*. Unpublished PhD thesis, Deakin University.

Language across the mathematics curriculum: some aspects related to cognition (disponible an anglais seulement)

Florence Mihaela Singer, Institute for Educational Sciences, Romania

Abstract

Contemporary society asks for a broad range of competencies that deal with communication and meta-cognition. In this context, there is a need to train language skills in mathematics in a more systematic way than before. Recent research in cognitive psychology offers some support for this idea, revealing a number of similarities beyond the differences: language and mathematics both have computational properties that are specifically processed by the human mind; language and mathematics are both embodied in human cognition; language, as well as numerical abilities contains inborn components of the human propensities for learning. Consequently, it is likely to have a positive effect on learning by stressing language and mathematics interaction in teaching and by valuing their common properties. A key factor in achieving these goals is to develop a competence-based curriculum that highlights various types of transfer.

Introduction

If learning mathematics supposes merely acquiring techniques for computing and solving categories of well-classified problems in order to "train the mind", then there is no need to pay attention to language and communication skills in mathematics. Paper-and-pencil, basic symbols, and formulas are sufficient tools to show math performance. Indeed, these tools proved to be adequate for decades. Today, however, in a socio-economical variable environment, the problems people are confronted with on the job market, or even in everyday life, are ill-defined. Far from being typical, these problems do not allow, unfortunately, already known algorithmic solutions. The solutions become more fluid, they need explanations, argumentations, sometimes they need negotiated meanings, or additional parameters to partially uncover the underlying complexity of the real world. Strategies that not long ago were only for scientific and research use are now needed for ordinary people in everyday life problem solving. In this context, we might consider PISA's definition of *Mathematics literacy*: "An individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgments and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflective citizen." This new context launched the issue of explicitly cultivating language and communication across the mathematics curriculum.

This article is focused on regarding language in mathematics education from a cognitive perspective. Recent research in cognitive science and neuroscience revealed two aspects that are contradictory. On the one hand, it seems that the number sense is active in preverbal children; on the other hand, although they show precocity of numerical ability at very young ages, later, most of students have difficulties in explaining their computing strategies or their approaches to problem solving. However, as we have discussed above, contemporary society asks for a broad range of competencies that deal with communication and meta-cognition. Therefore, there is a need to train language skills in mathematics starting with the earliest ages of the mathematics instruction. Below, we discuss how bridges to this target can be offered by the study of cognition.

Stressing the interaction in teaching between language and mathematics, profitable effect can be identified on learning. Nevertheless, we have to face the threat of a kind of subtle resistance on the part of mathematics teachers, who appreciate the "encrypted" characteristics of mathematics. Within a new paradigm, teachers are supposed to teach not only mathematics, but also how to communicate mathematically. Here, we have to take into account that without a specific training that is focused on transfer, the application of knowledge from one domain to another one is only accidentally done by the human mind. To enhance the transfer capabilities in school learning, it is necessary to develop a competence-based curriculum that highlights various types of transfer. Because mathematics is highly conceptual and structured, this change in approaching teaching and curriculum is significant and needs special preparation. These ideas will be detailed in what follows.

Designing a competence-based curriculum – a necessity of our times

The large mass of workers in factories in the first half of the twentieth century has been replaced nowadays by a large mass of people working in services within a global market. While the industrial worker required basic instruction to develop the ability to handle clear, specific driven tasks in a large driven mechanism, today's employee needs the ability to communicate, to think fluently, and to adapt him/herself to a variable environment, including coping with changing the profession many times in a lifetime. However, the schools have been ineffective in meeting these needs, as demonstrated by the fact that most of today's graduates show poor ability to transfer their skills from school to job, from one domain of knowledge to another, or from one job to a new one. While a "drill and practice" technique assured the success of the economy in the industrial era, this way of learning and approaching problems is largely inappropriate today. What roles does the knowledge society expect of schools? From a holistic perspective, these roles can be characterised by two words: *dispersion* and *extension* (Singer, 2007a). School as a knowledge institution needs to be more fluid (i.e. the borders between formal, informal and non-formal learning tend to be diffuse) and more extensive (i.e. the duration of school learning extends beyond the ages it used to cover, giving rise to concepts such as lifelong learning). In Drucker's words, "access to the acquisition of knowledge will no longer be dependent on obtaining a prescribed education at any given age. Learning will become the tool of the individual available to him or her at any age if only because so much of skill and knowledge can be acquired by means of the new learning technologies" (Drucker, 1994, p. 4).

Research in cognitive science stresses that learning within a domain is efficient (maximum educational benefits with minimum effort and resources) and effective (meaningful and relevant for real-life problem solving) if it is focused on the acquisition of the domain's specific symbol system and procedures, i.e. the very entities that enable the structuring and functioning of a specific thinking mode that allows adequately processing new contexts (e.g. Bransford et al, 2000; Gardner, 1983, 1991; Singer, 2003b). More specific, the successful learners are the ones who are able to reorganise their already acquired structured sets of skills and knowledge in order to obtain new procedural configurations that are adequate to new situations and to new problem understanding and solving (Singer & Sarivan, 2006). This process is valid at all levels of instruction as well as for the knowledge progress in general.

Designing a competence-centred curriculum is in line with the results of research in the field of cognitive psychology, according to which competencies are the best means to transfer and use knowledge and skills in new and dynamic situations/contexts. A functional definition of competence might be: a structured set of knowledge and skills acquired through learning, which allows individuals to identify and solve, in a variety of contexts, problems that are characteristic for a certain domain of activity (Singer, 2003a, 2006a). A competence-centred model of curricular design simplifies the curriculum structure and ensures a higher efficiency of the teaching/learning and assessment processes. This allows for operating at all levels with the same unit: the competence, capable of orienting the actions of all the actors of the educational process: curriculum designers, assessment specialists, teachers, inspectors, students, parents. A competence-based curriculum can better answer the current needs of social and professional life, of the labour market, focusing teaching on the pupil's acquisitions.

Language and mathematics – distant relatives?

The following paragraphs give some insights into the relationships between language and mathematics from a cognitive perspective. As Ongstad has emphasised, mathematics is 'conceptual' to the extreme: students will face problems understanding mathematics as a language on its own (its conceptual framework). Therefore, there is a need to identify ways not only to make this language accessible, but language should also serve as a tool in facilitating access to understanding mathematical concepts.

Over the last three decades, a large body of research has been devoted to analysing infants' cognitive capacities. An important category of experimental findings related to the subjects of this study show that preverbal children grasp some aspects involving quantities. It seems that the number sense is active in infants before they are able to use language. Thus, Wynn (1990, 1992), and Starkey (1992) showed that 5-month-old infants are able to compare two sets of up to three objects and to react when the result of putting together or taking away one object is falsified. These experiments were followed by many replications and extensions. Using the infant's gaze patterns it was possible to show that babies as young as 5 months are able to identify differences in numbers of objects up to three (Canfield and Smith, 1996). Infants looked longer at arrays presenting the wrong number of objects, even when the shapes, colours, and spatial location of the objects in both displays were new (Simon et al., 1995; Koechlin et al., 1997). A series of experiments suggested that number representation in humans has at least three components (Dehaene, 1997; Dehaene et al., 1999; Spelke, 2003): one for recognising numerosity limited up to four items at a glance, without counting – subitizing (e.g. Benoit et al., 2004; Gallistel and Gelman, 1991; Mandler and Shebo, 1982; Starkey et al., 1990), one for approximate numerosities (Dehaene, 1997; Gallistel and Gelman, 1992), and the third for large exact numerosities, in which the natural language interferes (e.g. Gelman, 1990). This area of neuroscience is important from an educational perspective because it shows that, far from being "tabula rasa" at birth, children have predispositions that allow them later to construct mathematics knowledge.

On the other hand, however, language plays an important scaffolding role for developing mathematical ability. I stress below the "scaffolding" (Vygotsky, 1934/86) function of language. As Clark (1995) has argued, language augments the existing computational abilities by externalising and recombining the information used by pre-linguistic computations in several ways. Clark sees language as fulfilling a Vygotskian scaffolding function: "Much of the true power of language lies in its under -appreciated capacity to reshape computational spaces which confront intelligent agents." Almost the same idea, expressed from a sociological anthropological perspective, is central to Lacan's psycho-linguistic conception (1966/1977).

Both domains, language and mathematics, have at least two common characteristics – computational properties and redundancy. Chomsky (1980) defines the faculty of language in a narrow sense as being the abstract linguistic computational system (narrow syntax) that generates internal representations and maps them into the sensory-motor interface by the formal semantic system. While the internal architecture of language supports many debates, there is an agreement that a core property of the faculty of language in a narrow sense is recursion, attributed to narrow syntax; this takes a finite set of elements (words, sentences) and yields an array of discrete expressions (Hauser, Chomsky and Finch, 2002), which can be considered potentially infinite. Similarly, from a set of a few digits, infinitely many natural numbers are generated through a recursive procedure given, essentially, by the Peano's axioms. The role of recursion is essential for mathematics, and, as traditionally Chomsky emphasised it, for language.

The embodied metaphors theory (Lakoff, 1987; Lakoff and Johnson, 1980) extends the syntax properties to the human conceptual systems. For Lakoff and his colleague, language is embodied, which means that its structure reflects our bodily experience, and our bodily experience creates concepts that are then abstracted into syntactic categories. They concluded that grammar is shared (to some degree) by all humans for the simple reason that we all share roughly the same bodily experience. Moreover, the core of our conceptual systems is directly grounded in perception, body movement, and experience, which integrate both the physical and social context. Going further on this line of research, *recursion* appears to be a general property, not of language, but of human thinking and through this, implicitly of language. Moreover, Lakoff and Nuñez (2000) explain that the structure of mathematics is built from various metaphors, ultimately grounded in our embodied reality. The metaphors are cognitive descriptions that express the way we think and understand; mathematics is a construct that makes use of metaphors (usually implicitly). More specific, three types of metaphors might be emphasised: *grounding metaphors* – metaphors that ground our understanding of mathematical ideas in terms of everyday experience, *redefinitional metaphors* – metaphors that impose a technical understanding replacing ordinary concepts, and *linking metaphors* - metaphors within mathematics itself that allow us to conceptualise one mathematical domain in terms of another mathematical domain.

For example, to explain how human beings construct the concept-process of infiniteness, Lakoff and Núñez put forward the hypothesis that mathematicians' ideas about infinity are originated by a single general conceptual metaphor in which processes that go on indefinitely are conceptualised as imperfective processes (the general name given by linguists to processes without an end). This metaphor is called the Basic Metaphor of Infinity (BMI) and its effect is to add a metaphorical completion to the ongoing process so that it is seen as having a result. Lakoff and Núñez argue that human beings conceptualise indefinitely continuous motion as repeated motion: "continuous walking requires repeatedly taking steps; continuous swimming requires repeatedly moving the arms and legs; continuous flying by a bird requires repeatedly flapping the wings. This conflation of continuous action and repeated actions gives rise to the metaphor by which continuous actions are conceptualised in terms of repeated actions." (Lakoff and Núñez, 2000, p. 157). They concluded that infinite continuous processes are conceptualised via this metaphor as if they were infinite iterative processes. What is to emphasize is the claim that metaphor does not reside in linguistic expressions alone, but also in conceptual structure. This is another reason for which domain-specific linguistic training (the mathematics language) should be ingrained in learning mathematical concepts and procedures.

The connection between language and mathematics is also highlighted by the development of mental operations. The child develops arithmetical operations that evolve from perceiving variation in quantity (within the so called proto-quantitative abilities) to mastering computing through the study in school of binary operations, such as addition and multiplication and their opposites: subtraction and division. As progressing in school learning, the algebraic operations increase in abstractness in two ways: by increasing the complexity of the numbers the operations apply to, and by the passage from objects to numbers and to symbolic expressions.

The category of logical operations extends the use of basic operators (conjunction, disjunction, negation) to the capacity of formulating logical inferences. Here the language has a decisive role, being essential for different types of reasoning. For example, different patterns are involved in deductive reasoning and non-deductive reasoning. In addition, different patterns are involved in different types of deductive reasoning, which can be: conditional, consecutive, causal, modal, normative, procedural. We can also identify two types of non-deductive reasoning: inductive and analogical. The daily reasoning and argumentation actually mix together many of these logical categories. In addition, many of our decisions are based on judgments that are not necessarily expressed in specific words. Yet, this description becomes necessary when analysing the mechanisms that underlie understanding, in order to develop appropriate training.

Mathematics is based on a variety of conventions (math symbols, math notational systems that have evolved through the centuries, conventional approaches in problem solving, etc.). Problem solving strategies were differently expressed along the history of mathematics, and the way in which a solution is understood and accepted is socially and historically determined. These conventions need to be learned explicitly because, as many studies have demonstrated, they are not necessarily internalised by learning mathematics concepts, they need separate training. For instance, learning how to solve a problem is not enough to know how to explain the solving in such a way to be understood by somebody else. Consequently, solving the problem and explaining the solution are different aspects and they both need to be trained explicitly and this training involves various aspects of communication.

Learning mathematics – building structural representations mediated by language

Mathematics deals with representations. In order to bring representational change to schools as an intrinsic phenomenon of learning, it is necessary to develop structural models that build relevant connections within the domain of study, and to make them part of the teaching-learning design. An adequate training based on these models may activate dynamic mental structures in students (Singer, 2007b). The key to an effective learning seems to be to help children building dynamic mental structures that can self-develop and generalise across new tasks in adequate contexts (Singer, 2001). Teaching should focus, on the one hand, to internalising a variety of representations and, on the other hand, to building ways to move from one representation to another one. Moreover, an appropriate training can help to move the connection language-mathematics to automatised procedures. Automaticity refers to the way we perform some mental tasks quickly and effortlessly, with little conscious thought or conscious intention. Automatic processes are contrasted with deliberate, attention-demanding, conscious, controlled aspects of cognition (Palmeri, 2001). Automatic processes seem to occur reflexively, while controlled processes require conscious intention to become initiated. This might optimise learning, because automatic processes are free from dual-task interference, i.e. they are not influenced by other tasks that are executed concurrently.

Traditionally, when learning mathematics, pupils practice only restricted areas of operations, usually the ones looking to be strongly related to the specific content (Singer & Voica, 2004). The results of this practice reflect an inconsistency in dealing with the basic concepts of the discipline and a huge difficulty in making connections and transfers. To overcome this situation, the teaching of mathematics should offer students opportunities to:

1. master and correctly use mathematical notation and terminology, in various contexts.
2. prove confidence and initiative in handling mathematical topics, in describing them, orally or in writing, and in supporting own work and the results obtained by means of intuitive arguments.

3. use mathematical ideas, rules and models, in tasking practical problems and everyday situations; understand the advantages offered by mathematics in tackling, clarifying, and tracking such problems or situations.
4. devise and solve exercises and problems; use standard methods, or adapt a known method, or imagine new solving paths, for this purpose.
5. compare and criticise different solutions of an exercise or problem, with respect to correctness, simplicity, and the significance of the results obtained.
6. engage in critical discussions concerning a mathematical subject, with peers or/with the teacher; state questions in order to clarify own ideas.
7. describe and compare concrete and mathematical objects; establish similarities and differences; select and classify such objects.
8. generalise and particularise ideas and methods.

More specifically, the competences that involve processing language in mathematics learning might be stimulated by practising the following categories of learning tasks, especially in compulsory schooling:

- Represent various types of numbers, variables and functions using different modalities. Translate from one representation to another.
- Compare different representations by emphasising correspondences among them. Use conventional symbols and terms.
- Express properties of mathematical operations (commutativity, associativity, neutral elements, and reversibility), by manipulating various representations. Use these properties for mental computing.
- Perform measurements using non-standard measures (such as pieces of plastic, or cardboard of different shapes and sizes). Chose the appropriate units for measuring a given object. Measure the same object using several measures (of different shapes or sizes). Record the results and discuss about them. Recognise the need to use standard units in order to be able to compare dimensions of objects.
- Estimate the results of certain measurements, based on familiar measures or units; verify them by measuring.
- State correctly the relative positions of objects, drawings, or geometrical entities using appropriate terms.
- Sort out objects, drawings, or mathematical entities using given criteria. Discover and identify criteria suitable for classifying given objects/ mathematical entities.
- Complete sequences of shapes or objects that hide different patterns; find patterns; create patterns and make up the corresponding sequences; describe various patterns.
- Use various symbols to represent the unknown term in an exercise. Solve exercises containing such symbols.
- Recognise concrete situations or expressions of the common language that can be modelled by mathematical operations; use these expressions currently.

- Transform word problems into exercises and vice-versa: device a variety of problems that might be processed by solving a given exercise. Create various word problems, starting from a given exercise or from another explicitly stated requirement.
- Identify the elements of a word problem, or of a problem-situation (given data, unknown data, relations among data). Discuss about them before engaging in solving the problem.
- Reformulate given problems and/or construct variants within given conditions or without restrictions (e.g. change the text and maintain the data, change parts of the text, change the question, etc.).
- Contrast and critique solutions and approaches to the same problem; discuss the correctness and significance of the results.

The teacher as a double expert

The knowledge society displays a mass need for quality education. This requires large numbers of "expert teachers" i.e. professionals who are able to find effective solutions to a wide range of instructional problems (Singer & Sarivan, 2006). The post-industrial era expects better trained teachers to better train students for new complex social demands. The "expert teachers" perform a number of competences. Firstly, they should exhibit good mathematics competences. These are acquisitions that reflect the specific cognitive and attitude profile of the professional representing the mathematics field of knowledge.

To give a more concrete flavour of this idea, below there is a list of proposed competencies of the mathematics graduate, which are correlated with the 6^{th} level of the European Qualifications Framework (Commission of the European Communities, 2005, 2006). According to Singer & Sarivan (2006), the graduate of mathematics at the university level should possess the following competences:

1. Identify relevant data, mathematical concepts and their relationships in order to solve practical/ theoretical problems.
2. Make use of algorithms in a variety of problem-solving situations or for the local/ global mathematical description of a concrete situation.
3. Make use of a specific symbol system in order to express quantitative and qualitative mathematical features and their processing algorithms for further study and communication to specialised/ non specialised audiences.
4. Generalise properties or algorithms in order to optimise problem solving strategies both individually and within a team.
5. Model a variety of situations and apply these models in real-life problem solving or in the design of various projects.
6. Show interest to identify patterns and to develop models and representations of the real world, including evaluation of personal approach to learning.

7. Develop hypotheses and assess their validity for an adequate management of study/work situations in which a variety of factors interact.
8. Use logical arguments to refer to ethical problems or social tensions in study/work contexts.
9. Develop a dynamic vision of Mathematics as a domain which is closely related to society by its role in the development of science, technology and social analysis.

How this new profile can be reflected in the practice of mathematics teaching? Prospective mathematics teachers ought to gain a mathematics thinking profile in order to facilitate competence transfer in their classes. Beyond the specific knowledge of what they are supposed to teach, a necessary condition is that teachers envisage mathematics as a process within its dynamics. The domain searches and fulfilments along history, the way in which the concepts have been clarified, enriched and extended are fundamental for understanding mathematics as a product of human culture and human mind. This understanding should be appropriately transmitted to pupils in secondary school, as well as in primary school.

In order to achieve this goal, prospective teachers should learn teaching competences that are specific to mathematics. Learning mathematics, they develop a specific thinking profile, which has some domain-specific attributes. These attributes should be valued by the preparation for the teaching profession. Thus, all teachers share a number of fundamental operational tools: planning, organising, assessing and reflecting on classroom activities. To make these tools efficient and well internalised, pre-service teacher training programs should create domain-specific contexts in which prospective teachers perform them within their field of expertise. Sarivan &Singer (2006) propose the following list of competencies for the mathematics teacher:

- Design a variety of activities in order to structure learning tasks that lead to identifying and overcoming difficulties in learning mathematics
- Perform motivating activities that address specific students needs in order to optimize learning
- Make use of an objective and transparent assessment oriented by the purpose to improve students' results
- Check the efficiency of the used methodology in order to improve the didactical activity
- Participate competently in the decision-making process at the level of the school as a learning organisation.

A mathematician develops her curriculum design competencies by constructing a structured didactical approach (N.B. structure is a key-concept in mathematics), which allows differentiating the methods depending on pupils' level of knowledge and understanding. The student in Mathematics structures a logical thinking mode that is based on assertions the truth-value of which can be precisely determined. The math teacher may efficiently transfer this acquisition in developing assessment items that ensure an objective appraisal of pupils and stimulate their progress in learning. In this process, communication is „mathematically oriented". Approaching multiple ways in problem solving and checking the correctness of the solutions are capacities the mathematicians develop when confronting their domain, and these can be seen from a communicational perspective. Such abilities are useful tools in reflecting about their own didactical approach in teaching. These also open the way in using multi-perspective in analysing and interpreting a variety of mathematical texts and in transferring this capacity to students. While developing acquisitions in the sphere of social relationships (teacher's role, students' roles, and classroom organisation), math prospective teachers learn to optimise strategies that they can use in organizing an engaging context for students. Moreover, from a social view, in a learning organisation, mathematicians can use their cognitive abilities in order to orient the school community toward pertinent decisions. The mathematics teachers can value their communication skills within the domain specific thinking profile and this interaction is likely to strengthen their own learning and their capacities to generate mathematics understanding in students.

Traditional mathematics teaching rarely stressed the value of communication understood in a broad sense. Consequently, innovative approaches should highlight both symbolic math communication, as well as verbal and social sides of communication. The first threaten further studies in mathematics, the second opens the doors of academic mathematics to practical applications. In conclusion, nowadays mathematics teachers cannot marginalise either of them.

References

Benoit, L., Lehalle, H. and Jouen, F. (2004). Do young children acquire number words through subitizing or counting? *Cognitive Development, 19*, 291–307.

Bransford, J.D., Brown, A.L. and Cocking, R.R. (Eds.). (2000). *How people learn: Brain, mind, experience and school*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Canfield, R.I., Smith, E.G. (1996). Number-based expectations and sequential enumeration by 5-month-old infants. *Developmental Psychology*, *32*, 269-279.

Chomsky, N. (1980). *Rules and Representations*. New York: Columbia University Press.

Clark, A. (1998). Magic Words: How Language Augments Human Computation. In P. Carruthers and J. Boucher (Eds.) *Language and Thought: Interdisciplinary Themes*, Cambridge University Press: Cambridge, p. 162-183

Commission of the European Communities (2005). Commission staff working document, Brussels. *Towards a European Qualifications Framework for Lifelong Learning* http://www.bologna-edinburgh2004.org.uk/library.asp

Commission of the European Communities (2006). Implementing the Community Lisbon Programme, *Proposal for a Recommendation of the European Parliament and of the Council on the establishment of the European Qualifications Framework for Lifelong learning*, Brussels, 5.9.2006.

Dehaene, S, Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., and Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. *Science*, *284*, 970-974.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York: Oxford U.P.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, *20* (3/4/5/6), 487–506.

Drucker P. F. (1994). *Knowledge work and knowledge society. The social transformations of this century* The 1994 Edwin L. Godkin Lecture, available at www.ksg.harvard.edu/ifactory/ksgpress/www/ksg_news/transcripts/drucklec.htm

Gallistel, C., and R. Gelman. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. Special issues: Numerical cognition. *Cognition*, *44*, 43-74.

Gallistel, C.R., and Gelman, R. (1991). Subitizing: The preverbal counting process. In F Craik, W. Kessen and A. Ortony (Eds.), *Essays in honor of George Mandler* (pp. 65-81). Hillsdale, NJ: Erlb. Assoc.

Gardner, H. (1983/1993). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic books.

Gardner, H. (1991). *The Unschooled Mind*. New York: Basic Books

Gelman, R. (1990). First principles organize attention to relevant data and the acquisition of numerical and causal concepts. *Cognitive Science*, *14*, 79-106.

Hauser, M.D., Chomsky, N., Fitch, W.T. (2002). The faculty of language: What is it, who has it, and how did it evolve? *Science*, 298, 1569-1579.

Hirschfeld, L.A. şi Gelman, S.A. (eds.) (1994). *Mapping the mind: Domain specificity in cognition and culture*, New York: Cambridge University Press.

Koechlin, E., Dehaene, S., and Mehler, J. (1997). Numerical transformations in five month old human infants. *Mathematical cognition*, *3*, 89-104.

Lacan, J. (1966/1977). *Écrits*, Paris: Seuil, 1966. Écrits, A Selection, New York: Norton, 1977.

Lakoff, G. (1987). *Women, fire and dangerous things: what categories reveal about the mind*, Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G. and Nuñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). *Metaphors We Live By.* Chicago: University of Chicago Press.

Mandler, G. & Shebo, B.J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General*, *11*, 1-22.

Ongstad, S. (ed) (2007). Language in Mathematics? A comparative study of four national curricula, Council of Europe

Palmeri, T.J. (2002). Automaticity. In L. Nadel et al. (Eds.), *Encyclopedia Of Cognitive Science* (488). London: Nature Publishing Group.

Sarivan, L., Singer, F. M. (2006). A Competence-based Curriculum for Initial Teacher Training: From Good Intentions to the Real Fact in F. M. Singer and L. Sarivan (Eds.) *QUO VADIS ACADEMIA? Reference Points for a Comprehensive Reform of Higher Education* (In Romanian, with a synthesis in English), Bucharest: Sigma, pp.236-287.

Simon, T., Hespos, S., and Rochat, P. (1995). Do infants understand simple arithmetic? A replication of Wynn (1992)*. Cognitive Development*, *10(2)*, 253-269.

Singer, F. M., (2001): Structuring the information – a new way of perceiving the content of learning, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik/IRME, MATHDI*, 6, 204-217.

Singer, F. M. (2003a). Designing a Competence Based Curriculum – Taking on The Challenge (In Romanian)*, The Pedagogical Review*, p. 69-84.

Singer, F. M. (2003b). *From cognitive science to school practice: building the bridge.* In N.A. Pateman, B.J.Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME.* Hawaii: CRDG. 4, 207-214.

Singer, F. M. (2006a). A Cognitive Model for Developing a Competence-based Curriculum in Secondary Education. In: Al. Crisan (Ed.), *Current and Future Challenges in Curriculum Development: Policies, Practices and Networking for Change*. Bucharest: Education 2000+ Publishers.

Singer, F. M., Sarivan, L., (coord., 2006). *QUO VADIS ACADEMIA? Reference Points for a Comprehensive Reform of Higher Education* (In Romanian, with a synthesis in English), Bucharest: Sigma.

Singer, F. M. (2007a). Balancing Globalisation and Local Identity in the reform of Education in Romania. In B. Atweh, M. Borba, A. Barton, D. Clark, N. Gough, C. Keitel, C. Vistro-Yu, and R. Vithal (Eds), *Internalisation and Globalisation in Mathematics and Science Education*, New York: Springer Science, Chapter 20, pp. 365-382.

Singer, F. M. (2007b). Beyond Conceptual Change: Using Representations to Integrate Domain-Specific Structural Models in Learning Mathematics. *International Mind, Brain, and Education Journal*, 1 (2), 84-97, Boston: Blackwell Publishing.

Singer, F. M., Voica, C. (2004). *Challenging the future: mathematics education in Romania between ideals and reality*, Cub, ICME-10.

Spelke, E. (2003). What Makes Us Smart? Core Knowledge and Natural Language. In D. Gentner & S. Goldin-Meadow (Eds.), *Language in Mind* (pp. 277-311). Cambridge, MA: MIT Press.

Starkey, P. (1992). The early development of numerical reasoning. *Cognition*, *43*, 93-126.

Starkey, P., Spelke, E., and Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition*, *36*, 97-127.

Vygotsky, L. S. (1934/1986). *Thought and Language.* Cambridge, MA: MIT Press.

Wynn, K, (1990). Children's understanding of counting*. Cognition*, *36*, 155-193.

Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, *24*, 220–251.