CONSEIL DE L'EUROPE
COUNCIL OF EUROPE

Strasbourg, le 24 août 1970

CCC/ESR (70) 56
Or. angl.

COE067010

COMITE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE

Réunion d'experts pour la révision
du programme commun minimum pour l'étude
des mathématiques au niveau universitaire
figurant dans le "Livret européen de l'Etudiant"

(Strasbourg, 22-23 juin 1970)

RAPPORT

19.029
04.22/51.01
TN 9042/JS

1. Ouverture de la réunion

La réunion a été ouverte le 22 juin 1970 à 10 h.. La liste des participants figure à l'Annexe I.

M. V. de Pange, Chef de la Division de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, souhaite la bienvenue aux participants au nom du Secrétaire Général du Conseil de l'Europe. Il se félicite de ce qu'un groupe de mathématiciens hautement qualifiés ait trouvé le temps de venir à Strasbourg pour donner des avis au Conseil de l'Europe sur la révision périodique du programme commun minimum pour l'étude des mathématiques. Depuis la dernière réunion, tenue sur ce sujet en février 1969 (Document CCC/ESR Projet 39/2), qui recommandait que "... soit confiée à un petit groupe de mathématiciens la tâche de remanier le programme du "Livret européen de l'Etudiant", le Professeur N. H. KUIPER (Pays-Bas) a diffusé un questionnaire pour rassembler des observations et des suggestions. Les résultats de son enquête ont été résumés par le Professeur H. CARTAN dans un rapport destiné aux participants de la présente réunion.

Le Conseil de l'Europe attache beaucoup d'importance aux réunions de ce genre, car elles contribuent grandement à la coordination "horizontale" et "verticale" de l'enseignement supérieur en Europe, c'est-à-dire à la coordination des programmes d'études de différentes universités européennes, ainsi qu'à un échelonnement dans le temps, plus cohérent, des programmes des étudiants, en accord avec la notion d'"enseignement permanent".

M. F. HONDIUS, Adjoint au Chef de la Division, fait ensuite un bref exposé sur le cadre général des activités spécifiques de cette dernière. Par coordination "horizontale", il faut entendre une plus grande mobilité dans l'espace. Si les universités européennes, par des accords multilatéraux ou bilatéraux conclus au niveau gouvernemental ou directement entre elles, pouvaient se mettre d'accord sur un programme commun minimum pour l'étude des mathématiques, divisées en éléments fondamentaux, la mobilité des étudiants d'une université à l'autre et d'un pays à l'autre, pour des raisons d'étude et de travail, se trouverait facilitée. Ceci faciliterait également la mobilité dans le temps. L'idée selon laquelle, dans la carrière d'un individu, les périodes d'étude et de travail pourraient se chevaucher, s'impose de plus en plus. Ce point est particulièrement important, compte tenu de l'évolution rapide de la science, qui rend souhaitable la création de cours de recyclage à l'intention des diplômés des universités. Un aspect plus officiel de la révision des programmes est celui de l'équivalence des grades et diplômes auxquels une autre réunion d'experts sera consacrée le mois suivant. Les principales recommandations résultant de ces réunions pourraient être soumises à la Conférence des Ministres européens de l'éducation, qui se tiendra à Bruxelles en mai 1971.

./.

2. Election d'un Président et d'un Rapporteur

Le Professeur A. DOLD (Heidelberg) est élu à l'unanimité président de la réunion. Le Professeur BADER (Neuchâtel) accepte de remplir la fonction de rapporteur.

3. Révision du programme commun minimum

Les participants procédent à la révision du programme commun minimum pour l'étude des mathématiques au niveau universitaire, contenu dans le "Livret européen de l'Etudiant", brochure qui a été éditée par Dunod, Paris, pour le compte de l'Association Européenne des Enseignants.

Le texte complet du document révisé, tel qu'il a été établi, figure à l'Annexe II. Il est précisé que les modifications apportées affectent principalement le fond du programme mais dans certains cas, des améliorations d'ordre linguistique peuvent également être apportées. Les participants ont estimé que le programme révisé, tel qu'il se présente maintenant, pourrait encore être modifié à l'avenir, à intervalles réguliers.

4. Suggestions et questions diverses

S'étant ainsi acquittés de leur tâche essentielle, les experts font des suggestions concernant les points sur lesquels le Conseil de l'Europe pourrait entreprendre une action.

(a) Réunion d'experts en mathématiques appliquées

Le présent groupe d'experts se considère comme essentiellement représentatif des mathématiques pures. Compte tenu des nombreuses applications extrêmement importantes - et souvent nouvelles - des mathématiques, par exemple dans les domaines de la statistique, de l'économie, de l'administration, de l'informatique, de la mécanique, etc..., le groupe suggère que le Conseil de l'Europe réunisse, dès qu'il en aura la possibilité, un groupe d'experts en mathématiques appliquées, qui serait chargé d'examiner les mesures complémentaires à prendre en ce qui concerne le second niveau d'études.

Ce groupe pourrait comprendre une douzaine de membres. Les noms suivants ont été avancés :

J.L. LIONS (Paris)	- fonctions analytiques
R. TIMMAN (Delft, Pays-Bas)	- aérodynamiques
Dr. KRICKEBERG (Heidelberg, Allemagne)	- probabilité
Dr. RUTISHAUSER (Féd. polytechnique Zürich)	- informatique
Dr. Barnard (Royaume-Uni)	- statistiques, gestion
Dr. GRENANDER (Institut royal de technologie, Stockholm)	- statistiques, probabilité
Dr. FREDENS (Aarhus, Danemark)	- économie
Dr. GLASINGE (Institute for Advanced Study, Dublin)	- mécanique

./.

Si l'on élargit ce groupe en y ajoutant quatre autres personnes, il serait bon de faire figurer parmi ces dernières deux experts ayant assisté aux réunions précédentes, par exemple les Professeurs Kuiper et Dold.

(b) Définition d'"unités d'étude" fondamentales

Sur proposition du Professeur WALLIN, les participants recommandent de définir une "unité d'étude" fondamentale, afin de faciliter, sur une base de réciprocité, l'établissement de "valeurs" par une université pour des travaux effectués dans une autre. A chaque unité pourrait correspondre "x" semaines d'étude. Pour chaque élément du programme, on pourrait déterminer le nombre d'unités nécessaires par étudiant moyen.

Cette suggestion correspond tout à fait aux conclusions de deux autres projets du Comité de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, concernant la "diversification" et la "recherche en matière d'enseignement supérieur".

(c) Mise en oeuvre du programme commun minimum

Les participants demandent au Conseil de l'Europe de faire tout ce qui est en son pouvoir pour donner le maximum de publicité à la mise en oeuvre souhaitée du programme commun minimum. Il a été reconnu que cette mise en oeuvre progressive devrait résulter de mesures prises par un grand nombre de parties intéressées : autorités nationales chargées de l'enseignement, universités,associations professionnelles et boursiers agissant à titre individuel.

Pour ce qui est du Conseil de l'Europe, il serait bon que le Comité de l'Enseignement supérieur et de la Recherche - qui présente l'avantage unique de représenter à la fois les autorités gouvernementales responsables de l'enseignement et les autorités universitaires - prenne note du programme, tel qu'il se présente actuellement, et le soumette à l'attention de toutes les personnes et autorités compétentes par l'intermédiaire de ses agents de liaison.

Simultanément, les membres du présent groupe d'experts et leurs prédécesseurs de la réunion de 1969 pourraient être invités à user de leur influence personnelle pour que leur programme bénéficie d'une plus grande publicité dans leurs universités respectives et par l'intermédiaire de sociétés savantes et de publications professionnelles.

La question est posée de savoir si le Conseil de l'Europe serait disposé à l'avenir à prendre en charge l'édition du "Livret européen de l'Etudiant" et, d'une façon plus générale, à jouer le rôle d'agence centrale d'exécution en ce qui concerne les programmes de mathématiques. Le représentant du Secrétariat réserve sa réponse sur ces points, car, en principe, le rôle du CCC consiste à assister les Etats membres dans l'élaboration de leur politique et non pas à se charger de travaux d'exécution à long terme.

./.

5. Clôture de la réunion

Au nom du Secrétaire Général, M. de PANGE remercie les experts, et notamment le Président et le Rapporteur, de leur importante contribution aux travaux du Conseil de l'Europe consacrés à cette question.

La séance est levée le 23 juin 1970 à 17 heures.

APPENDIX I
ANNEXE I

LIST OF PARTICIPANTS
LISTE DES PARTICIPANTS

BELIGIQUE/ BELGIUM	M. de LATTRE Professeur à La Faculte Polytechnique de Mons et au Centre Universitaire de l'Etat à Mons 93 Boulevard Albert Elisabeth B - 7000 MONS
DANEMARK DENMARK	Mr. K. BAGGER LAURSEN Institute of Mathematics University of Aarhus DK - 8000 AARHUS C
REPUBLIC FEDERALE D'ALLEMAGNE/ FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY	Prof. Dr. A. DODD Mathematiches Institut D - 69 HEIDELBERG Berlinstrasse 17 M.D. BRESSLER D - 4800 BIELEFELD Ambruche 30
FRANCE	Georges REEB Institut de Mathematiques 7 rue R. Descartes 67 STRASBOURG France
IRLANDE/ IRELAND	Professor J.R. TIMONEY Chairman National Committee for Mathematics Royal Irish Academy 19 Dawson Street DUBLIN 2

PAYS-BAS/ NETHERLANDS	Prof. Dr. T.A. SPRINGER Mathematisch Instituat der Rÿksuniversiteit Budapestlaan, UTRECHT
NORVEGE/ NORWAY	Universitetslektor B. BIRKELAND Institute of Mathematics University of Oslo P.O. Box 1053 Blindern OSLO 3
SUEDE/ SWEDEN	Prof. H. WALLIN University of Umea S - 901 87 UMEA
SUISSE/ SWITZERLAND	M.R. BADAR Professeur à l'Université de Neuchâtel Clos Brochet 30 CH - 2000 - NEUCHATEL
ROYAUME UNI/ UNITED KINGDOM	Dr. F. SMITHIES Reader in Mathematics, St. John's College University of Cambridge CAMBRIDGE
EXPERT CONSULTANT CONSULTANT EXPERT	Prof. H. CARTAN 95 Boulevard Jourdan 75 - PARIS (14e)
SECRETARIAT GENERAL DU CONSEIL DE L'EUROPE	M.V. DE PANGE Chef de la Division de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
	M. F.W. HONDIUS Sous-chef de la Division de l'Enseignement supérieur et de la Recherche

./.

ANNEXE II

Projet de texte révisé
du
"Livret Européen de l'Etudiant"

Le programme commun minimum pour les études des mathématiques au niveau universitaire a été rédigé par un groupe de mathématiciens européens qui se sont réunis, sur l'initiative de l'Association Européenne des Enseignants et sous les auspices du Conseil de l'Europe, à Paris en octobre 1960 et à Düsseldorf en mars 1962. Il s'agit d'une Recommandation adressée aux autorités nationales compétentes pour la détermination des programmes de mathématiques. L'Association Européenne des Enseignants a publié le programme dans une brochure intitulée "Livret Européen de l'Etudiant", éditée par Dunod à Paris. Au cours d'une autre rencontre de mathématiciens à Strasbourg les 27 et 28 février 1969, la publication d'une édition révisée a été recommandée, laquelle devrait reproduire le programme commun minimum proposé ci-après.

PROGRAMME MINIMUM COMMUN POUR L'ETUDE DES MATHEMATIQUES AU NIVEAU UNIVERSITAIRE

Programme révisé défini par un groupe d'experts du Conseil de l'Europe Strasbourg, 22 et 23 juin 1970

PREMIER NIVEAU. (L'énumération des matières du programme n'implique pas un ordre pour les traiter.)

1. Notions générales d'algèbre

Vocabulaire élémentaire de logique
Ensembles, sous-ensembles, ensembles produits, fonctions. Ensembles finis et analyse combinatoire.

Entiers rationnels, nombres rationnels, nombres réels, nombres complexes.

Relations définies sur un ensemble ; relations d'équivalence, relations d'ordre. Lois de composition définies sur un ensemble.

Structure de groupe, d'anneau, de corps (se borner à des définitions et à quelques exemples, sans théorie générale).

Anneau des polynômes à coefficients rationnels, réels ou complexes. Formule du binôme. Division des polynômes suivant les puissances décroissantes. Plus grand commun diviseur.

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

Enoncé du théorème de d'Alembert-Gauss. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

2. Géométrie analytique et géométrie différentielle classiques à 2 et 3 dimensions.

Equation des droites, plan, cercle, sphère. Problèmes d'angles et de distances dans R^2 et R^3.

Coordonnées polaires dans R^2.

./.

Etude (à titre d'exemple) de quelques propriétés des coniques par des procédés analytiques. Etude sommaire de quelques quadriques (à titre d'exemple). Génération et représentation de surfaces diverses.

Notions de géométrie affine et de géométrie projective.

Propriétés générales des courbes planes définies par $y = F(x)$ ou sous forme paramétrique. Etude locale. Notion sur les courbes de l'espace à 3 dimensions.

3. Algèbre linéaire (niveau 1)

Définition des espaces vectoriels ; sous-espaces vectoriels, produits d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels. Indépendance linéaire ; bases d'un espace vectoriel de dimension finie.

Applications linéaires ; somme, produit, noyau, image, rang.

Calcul matriciel.

Formes linéraires, équations linéaires.

Déterminants (via formes multilinéaires).

Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme ; équation caractéristique. Réduction d'une matrice à la forme diagonale dans le cas des racines distinctes, et à la forme triangulaire dans le cas général.

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques ; formes hermitiennes.

Espaces affines ; parallélisme, barycentre, ensembles convexes.

Notions métriques dans les espaces vectoriels sur R : norme, distance, produit scalaire et normes associées ; et inégalité de Cauchy-Schwarz. Bases orthonormales dans R^n.

Groupe des isométries, groupe des rotations autour d'un point, angle de deux vecteurs, orientation de R^n ; produit vectoriel dans R^3.

./.

4. Nombres réels, fonctions continues, calcul différentiel élémentaire

On pourra soit donner une construction du corps des nombres réels, soit en donner une définition axiomatique.

Ensembles de nombres réels : majorants, minorants. Borne supérieure et borne inférieure. Intervalles. Suites bornées, suites convergentes. Théorèmes fondamentaux sur les limites. Critère de Cauchy ; théorème de Bolzano-Weierstrass.

Fonctions d'une variable réelle : limites, continuité. Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues numériques sur un intervalle (valeurs intermédiaires, bornes, continuité uniforme).

Fonctions monotones ; existence de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone. Exemples de fonctions discontinues.

Dérivées. Calcul des dérivées. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée d'une fonction réciproque.

Théorème de Rolle ; théorème des accroissements finis. Formule de Taylor. Maxima et minima des fonctions numériques d'une variable réelle.

Comparaison des croissances de deux fonctions. Développements limités, applications ; division des polynômes suivant les puissances croissantes.

Fonctions vectorielles d'une variable réelle. Continuité, dérivation, formule de Taylor.

Fonctions de plusieurs variables ; continuité. Fonction différentiable en un point, différentielle en ce point. Dérivées partielles en un point, différentiabilité d'une fonction possédant des dérivées partielles continues.

Dérivées d'une fonction composée. Interprétation géométrique : tangente, plan tangent. Calcul des dérivées d'une fonction implicite.

Dérivées partielles d'ordre supérieur ; propriété de symétrie. Formule de Taylor, Maxima et minima des fonctions de plusieurs variables.

./.

5. Calcul intégral

Définition et propriétés de l'intégrale définie introduite comme limite de sommes ; intégralité des fonctions continues. Propriété de la forme linéaire définie par l'intégrale. Relation entre intégrale indéfinie et fonctions primitives. Exemples de fonctions primitives. Exemples de fonctions définies par une intégrale.

Méthodes d'intégration. Intégration des fractions rationnelles et des fonctions qui s'y ramènent.

Intégrale définie d'une fonction continue sur un intervalle quelconque (éventuellement infini) : convergence, convergence absolue.

Longueur d'une courbe paramétrée ; expression de la longueur pour une paramétrisation continûment dérivable.

Intégrales curvilignes. Notions élémentaires sur les intégrales doubles et triples, et sur leur mode de calcul. Règles du calcul différentiel extérieur, leur application aux intégrales de surface, à la formule du changement de variables dans les intégrales multiples, et aux transformations des intégrales multiples (Stokes). (On ne donnera pas de démonstration ; on pourra se borner à démontrer la formule de Riemann, dans le plan, pour un contour simple). Cas particuliers : gradient, divergence, rotationnel.

6. Séries

Séries à termes réels ou complexes ; convergence, critère de Cauchy.

Séries à termes positifs : comparaison, critères simples de convergence. Séries à termes positifs décroissants : comparaison avec une intégrale.

Séries absolument convergentes. Séries non absolument convergentes, séries alternées.

Suites et séries de fonctions ; convergence simple, convergence uniforme. Continuité, dérivation et intégration des suites et séries dans le cas de la convergence uniforme.

Développement en série de e^x, sin x, cos x, log (1 + x), $(1 + x)^z$, arc tg x, arc sin x.

./.

Théorie élémentaires des séries entières d'une variable, réelle ou complexe. Disque de convergence. Dérivation ; intégration dans le domaine réel. Définitions et propriétés de e^z, sin z et cos z pour z complexe.

Notions élémentaires sur les séries de Fourier ; calcul des coefficients.

7. Equations différentielles

Notions fondamentales sur les équations différentielles ; trajectoires d'un champ de vecteurs, problèmes de valeurs initiales, problèmes aux limites. Illustration de ces problèmes par des équations intégrales par quadrature ; équations linéaires à coefficients constants.

Théorème de superposition linéaire pour les solutions des équations ou des systèmes d'équations linéaires homogènes à coefficients variables, équations non homogènes.

8*. Analyse numérique

Systèmes d'équations linéaires ; méthode d'élimination et méthode d'approximations successives. Optimation linéaire ; approximation au sens de Tchébycheff et au sens de Gauss. Algorithmes simples pour le calcul des valeurs propres.

Polynômes et algorithmes de division comme exemples simples d'algorithmes. Méthodes d'itération pour l'approximation des solutions d'équations algébriques et transcendantes.

Procédés d'intégration numérique. Equations différentielles ordinaires : méthodes d'itération, méthode de Runge-Kutta pour des valeurs initiales. Méthode des différences pour des problèmes aux limites.

Travaux pratiques sur les machines. Programmation simple.

9. Mécanique

Définition d'un mouvement par rapport à un repère. Compléments de cinématique du point. Exemples simples de détermination de mouvements à partir de l'accélération et des conditions initiales (mouvements à accélération centrale). Champ de vitesse d'un solide. Changement de repère : composition des vitesses et des accélérations.

./.

---

* Un seul des trois points 8-9-10 au choix.

Masse d'un système. Loi de conservation. Barycentre. Centre d'inertie. Torseur des quantités de mouvement. Energie cinétique.

Cas du solide. Tenseur d'inertie. Exemples simples de mouvement de solides.

10. Introduction au calcul des probabilités et à la statistique mathématique

Axiomes du calcul des probabilités. Indépendance et probabilité conditionnelle.

Quelques lois de probabilité à une dimension : loi binomiale, loi de Poisson, loi de Laplace-Gauss.

Espérance mathématique d'une fonction ; fonction génératrice des moments. Valeurs typiques.

Lois de probabilité à deux dimensions.

Statistique élémentaire : méthode des moindres carrés, corrélation, régression.

DEUXIEME NIVEAU (Mathématiques pures)

11. Algèbre des ensembles et algèbre (niveau 2)

Révision des notions élémentaires de la théorie des ensembles, de la notion d'application et du calcul logique.

Notions sur les cardinaux : puissance du dénombrable, puissance du continu.

Axiome du choix ; théorème de Zorn (sans démonstration).

Langage de la théorie des catégories ; utilisations élémentaires.

Lois de composition : propriétés (associativité, etc.).

Groupes ; sous-groupes, groupes quotients ; théorème d'homomorphisme. Exemples. Produit de groupes.

Groupe symétrique ; signature d'une permutation.

Groupes de transformations ; transitivité, transitivité simple ; trajectoires : exemples. Exercice possible : théorème de Sylow.

./.

Anneaux et algèbres ; modules, idéaux ; anneau-quotient. Exemples. (algèbre des matrices, quaternions).

Algèbre de polynômes. Divisibilité.

Corps. Caractéristique d'un corps ; exemples.

12. Algèbre linéaire (niveau 2)

Révision de l'algèbre linéaire (niveau I).

Bases d'un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie). Dualité des espaces vectoriels de dimension finie ; application aux équations linéaires.

Produits tensoriels et extérieurs d'espaces vectoriels.

Formes bilinéaires symétriques et hermitiennes ; orthogonalité. Formes quadratiques et hermitiennes ; réduction à une somme de carrés ; loi d'inertie. Groupe orthogonal, groupe unitaire, opérateurs hermitiens.

13. Topologie générale

Topologie de R, de R^n ; théorème de Borel-Lebesgue.

Définition générale d'un espace topologique (par les ouverts ou par les fermés) ; exemple des espaces métriques. Fonctions continues. Produit d'espaces topologiques.

Espaces compacts ; théorèmes classiques. Espaces localement compacts.

Espaces connexes ; image d'un espace connexe par une application continue.

Applications homotopes ; espaces simplement connexes.

Espaces métriques (plusieurs exemples). Continuité uniforme ; cas d'une application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique.

Espaces métriques complets (sans traiter de la complétion). Méthodes des approximations successives.

14. Espaces fonctionnels

Distance de la convergence uniforme sur l'espace des applications dans un espace métrique ; cas où ce dernier est complet ; cas des applications continues.

Familles sommables dans un espace normé complet : convergence normale.

Espaces vectoriels normés ; espaces de Banach. Exemples : norme de la convergence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen d'intégrales.

./.

Théorème de Stone-Weierstrass, ou tout au moins théorème de Weierstrass (approximation par les polynômes).

Espaces préhilbertiens : exemples. L'espace L^2 est complet (avec l'intégrale de Lebesgue). Inégalités. Projection sur un sous-espace vectoriel complet. Espaces préhilbertiens à base dénombrable ; orthogonalisation de Schmidt. Applications : suites de polynômes spéciaux, séries de Fourier.

15. Intégration (niveau 2)

Intégrale de Lebesgue de fonctions numériques définies dans R^n. Généralisation (au moins pour n = 1) : intégrale par rapport à une mesure de Stieljes - Radon. Espace L^1. Théorème de Lebesgue-Fubini (intégrations successives). Changement de variables. Applications : calcul de volumes.

Séries et intégrales dépendant de paramètres : continuité, dérivation, intégration. Exemples et contre-exemples.

16. Calcul différentiel

Différentielle (du premier ordre) d'une application d'un ouvert d'un espace vectoriel normé dans un autre. Propriétés ; calcul.

Théorème d'inversion locale d'une application continûment différentiable ; théorème des fonctions implicites.

Formes différentielles. Formules de Stokes dans des cas simples. Primitives locales d'une forme différentielle fermée de degré un.

Systèmes différentiels : existence et unicité locales dans le cas lipschitzien. Variation de la solution en fonction des données. Cas d'un système différentiel linéaire.

Intégrales premières d'un système différentiel : résolution d'une équation aux dérivées partielles linéaires du premier ordre.

Eléments de calcul des variations.

17. Fonctions analytiques d'une variable complexe

Séries entières.

Intégrales de Cauchy.

Développement de Taylor. Théorème de Liouville. Propriété de la moyenne ; fonctions harmoniques. Principe du maximum. Développement de Laurent. Résidus.

Topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

./.

Fonctions définies par des séries ou des produits infinis ; exemples.

Représentation conforme (exemples simples). Notions sur les surfaces de Riemann ; exemples.

Notions sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

Systèmes différentiels holomorphes ; méthodes des majorantes.

18. Bloc élémentaire

Théorie des entiers naturels ; opérations; divisibilité, nombres premiers, théorème d'unique factorisation. Corps des entiers modulo p (p premier).

Corps des rationnels. Corps des réels : caractérisation axiomatique et existence. Corps des complexes.

Existence des représentations continues du groupe additif R sur le groupe multiplicatif des nombres complexes dont la valeur absolue est égale à 1.

Traitement simple des axiomes de la géométrie euclidienne.

Modèles euclidiens de géométries non-euclidiennes.
N.B. Ce point présente un intérêt particulier pour les futurs enseignants du degré secondaire.

DEUXIEME NIVEAU (Mathématiques appliquées)

19. Compléments d'algèbre

Groupes : sous-groupes, groupes-quotients, théorème d'homomorphisme. Exemples.

Bases d'un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie). Dualité des espaces vectoriels de dimension finie. Matrices et valeurs propres (révision).

Produit tensoriel d'espaces vectoriels ; algèbre tensorielle.

Formes quadratiques et hermitiennes : loi d'inertie ; réduction simultanée de deux formes dont l'une est définie positive.

Groupe orthogonal, groupe unitaire.

./.

20. Fonctions analytiques d'une variable complexe

Séries entières convergentes.

Intégrale de Cauchy.

Développement de Taylor et de Laurent. Principe du maximum. Résidus.

Fonctions définies par des séries ou des produits infinis ; exemples.

Représentation conforme. Exemples de surfaces de Riemann.

21. Compléments de calcul intégral

Intégrale de Lebesgue-Stieltjes dans R^n pour les fonctions numériques : énoncé (sans démonstration) des théorèmes fondamentaux.

22. Espaces fonctionnels

Espaces métriques ; limite, continuité. Espaces métriques complets.

Espaces vectoriels normés ; espaces de Banach.

Exemples : norme de la convergence uniforme sur un espace vectoriel de fonctions numériques, normes diverses définies sur des espaces fonctionnels au moyen d'intégrales.

Théorème de Weierstrass (approximation par les polynômes).

Approximations successives pour une application strictement contractante. Application aux fonctions définies par des équations (fonctions implicites).

Espaces préhilbertiens et espaces hilbertiens : exemples. L'espace L^2 est complet.

23. Equations intégrales

Equation de Volterra.

Equation de Fredholm : cas d'un noyau continu, cas qui s'y ramènent. Cas d'un noyau hermitien.

Développement en série de fonctions orthogonales.

24. Equations différentielles ordinaires

Théorème d'existence et d'unicité dans le cas analytique complexe. Dépendance des paramètres.

Systèmes différentiels linéaires.

./.

Théorème de Fuchs pour une équation linéaire du second ordre.

Théorème d'existence et d'unicité dans le cas réel. Dépendance des paramètres.

Systèmes différentiels linéaires dans le domaine réel.

Etude, sur quelques exemples, des solutions d'un système différentiel au voisinage d'un point singulier (col, noeud, foyer).

Problèmes aux limites du type Sturm-Liouville.

25. Equations aux dérivées partielles

Une équation quasi-linéaire du premier ordre : problème de Cauchy, caractéristiques.

Définition des caractéristiques d'un système quasi-linéaire de deux équations du premier ordre à deux variables.

Equation de Pfaff complètement intégrable.

Equation du deuxième ordre : séparation des variables.

Equation du deuxième ordre à coefficients constants :

- Type elliptique : équation $\Delta \varphi = 0$; théorème de la moyenne, solution élémentaire ; unicité pour les problèmes de Neumann et de Dirichlet ; fonction de Green, formule de Poisson pour la sphère ; intégrale d'énergie (Dirichlet). Equation $\Delta \varphi + k^2\varphi = 0$: la condition de radiation : réduction à une équation intégrale.

- Type hyperbolique : équation des ondes à 1, 3 et 2 variables d'espace ; solution élémentaire ; problème aux limites ; formules de Poisson et de Kirchhoff. Méthode de descente (Hadamard). Intégrale d'énergie.

Type parabolique : équation de la chaleur à une variable d'espaces ; solution élémentaire ; problème aux limites.

26. Calcul des variations

Equations d'Euler-Lagrange pour les intégrales simples ou multiples.

Conditions aux limites naturelles. Multiplicateur de Lagrange.

27. Distributions, transformations de Fourier et de Laplace

Définition des distributions sur R^n. Dérivation des distributions ; exemples.

./.

Transformation de Fourier et de Laplace : introduction à la théorie. Applications aux dérivées partielles.

Exemples de développements asymptotiques.

28. Fonctions spéciales

1) Fonction Γ (z). Développement asymptotique.

2) Un choix entre les fonctions suivantes :

- fonctions de Bessel-Hankel-Neumann ; expressions asymptotiques, expressions intégrales.
- fonctions de Legendre, de Legendre associées, fonctions harmoniques sphériques.

3) Eventuellement un choix parmi les fonctions suivantes :

- fonctions hypergéométriques ;
- polynômes de Laguerre ;
- polynômes d'Hermite ;
- fonctions de Mathieu ;
- fonctions elliptiques.

- - - - - -